Planches Oraux 2003

Centrale - Math I

-I- 1) Calculer le déterminant $V(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$. Généraliser.

2) Développer le polynôme $\prod_{k=1}^{n}(T-x_k)$ à l'aide des polynômes symétriques élémentaires.

3) Pour $s \in \{0,\cdots,n\}$, on note $\Delta_{n,s}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

Calculer $\Delta_{n,s}$.

-II- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Centrale - Math II

Soient r et q des fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $\forall x \in [a,b]\ r(x) \geq q(x)$. Soient y une solution non nulle de (E_1) : $y''+qy=0$ et z une solution de (E_2) : $z''+rz=0$ sur $[a,b]$.
Soient x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y.

1) $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que peut-on dire de leur signe ?
2) On pose $W(x)=\begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$. Ceci ressemble à un wronskien mais n'en est pas un. Calculer $W'(x)$.
3) Montrer que soit z a un zéro dans $]x_0,x_1[$, soit $z(x_0)=z(x_1)=0$.
4) Montrer que toute solution de (E_1) est proportionnelle à y ou a un unique zéro dans $]x_0,x_1[$.

CCP

-I- 1) Etudier la convergence de la série géométrique $\sum z^n$ où $z \in \mathbb{C}$.

2) Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum e^{-nx}$.

-II- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable.
2) Soit M telle que $M^2=A$.
   a) Montrer que $\{0\} \subset \operatorname{Sp} M \subset \{0,1,-1\}$.
   b) Montrer que les sous espaces propres de M sont de dimension 1.
   c) Résoudre l'équation $M^2=A$.

TPE - Math I

-I- On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n t}{\cos t} dt$.

1) Etudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Montrer que la série $\sum I_n$ converge et calculer sa somme.
3) Calculer I_0 et I_2.

-II- Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\arctan t}{t} dt$.

TPE - Math II

-I- On considère la surface d'équation $\ln(1+y-z) - x - z = 0$.

1) Montrer que la surface apparaît implicitement au voisinage de $(0,0,0)$ comme le graphe d'une fonction $z = \varphi(x,y)$.
2) Donner un DL à l'ordre 2 de φ au voisinage de $(0,0)$.

-II- Pour $k \in [\![0,4]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{kx}$ et $E = Vect(F_k)_{k\in[\![0,4]\!]}$.

1) Montrer que $\forall f \in E\ f'' - 3f' + 2f \in E$.
2) Soit $\varphi : E \to E, f \mapsto f'' - 3f' + 2f$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ. En déduire que φ est diagonalisable.

-III- Soit A un anneau tel que $\forall x \in A\ x^3 = x$.

1) Montrer que $\forall x \in A\ 6x = 0$.
2) Soit $B = \{x \in A / 2x = 0\}$. Montrer que B est un anneau.

ENS Cachan

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On note $V(f,[a,b]) = \displaystyle\sup_{\sigma\in S([a,b])} \sum_{i=1}^{n} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|$ où $S([a,b])$ est l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$, ie $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$.

1) On suppose que f est C^1. Déterminer $V(f,[a,b])$.
2) On dit que f est à variations bornées si $V(f,[a,b]) < +\infty$.
   Montrer que si $c \in]a,b[$ on a $V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$.
3) Montrer que f est à variations bornées si et seulement si f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

ENS Ulm/Lyon/Cachan

Soit $A : [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$ une application C^1 telle que $\forall t \in [0,1]\ A(t)^2 = A(t)$.

1) Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.
2) Montrer que l'on peut choisir $P : [0,1] \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que

$$\forall t \in [0,1]\ A(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1}$$

Indication : On pourra chercher P solution d'une équation différentielle de la forme $P' = BP$.

ENS Ulm

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \neq m \ \ |z_n - z_m| \geq 1$.
Montrer que $\sum \frac{1}{z_n^3}$ converge.

ENS Lyon

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$.
On suppose que $\forall X \in \mathbb{C}^n \ \exists k \ P_k(X) = 0$. Montrer que $\exists k \ P_k = 0$.

Mines-Ponts

-I- Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-x}e^{-t}}{1+t^2}dt$.
Etudier le domaine de définition, la dérivabilité et les limites aux bornes du domaine.

-II- Soient $0 < a_1 < a_2 < a_3$. Etudier les valeurs propres et les sous espaces propres de $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}$.

-III- Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\frac{1}{X^n - 1}$.

Déroulement des épreuves

- Centrale Math I : Algèbre / Géométrie - 30 min de préparation, 30 min de présentation
- Centrale Math II : Analyse / Géométrie différentielle - 30 min de préparation, 30 min de présentation
- CCP : 25 min de préparation, 25 min de présentation
- TPE : 30 min de préparation, 30 min de présentation
- ENS Cachan : pas de préparation, 45 min
- ENS Ulm/Lyon/Cachan : pas de préparation, 45 min
- ENS Ulm : pas de préparation, 60 min
- ENS Lyon : pas de préparation, 45 min
- Mines : 15 min de préparation sur le premier exercice, 45-60 min de passage