

MAGISTÈRE MODÉLISATION MATHÉMATIQUES ET
MÉTHODES INFORMATIQUES

RAPPORT DE STAGE 1ÈRE ANNÉE

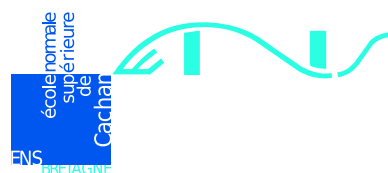
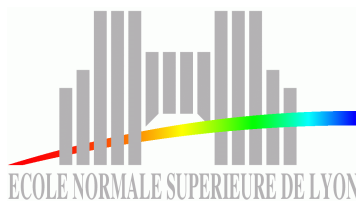
Juin - Juillet 2004

AUTOUR DES PROBLÈMES DE
COUCHES LIMITES

Sébastien Giraud

*Encadré par Emmanuel Grenier**, Stéphane Descombes*

*et David Gérard-Varet**



*U.M.P.A, E.N.S. Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon

Introduction

Au cours de ce stage, on s'est intéressé aux couches limites des fluides faiblement visqueux. Ces couches limites sont présentes dans de nombreux écoulements, notamment géophysiques. Leur étude est alors une étape indispensable pour mieux comprendre ce qui se passe dans les profondeurs de notre planète.

Si les géophysiciens savent aujourd'hui que le noyau de la Terre est liquide, mais que son cœur est solide, ils n'ont pas répondu à toutes les questions qu'ils se posent sur la structure profonde de notre planète. Quelles sont ses propriétés mécaniques, thermiques, électro-magnétiques, physico-chimiques ? Comment le fluide du noyau circule-t-il ? Comment crée-t-il le champ magnétique qui, à la surface, oriente l'aiguille des boussoles ? Toutes ces questions sont liées, et les géophysiciens et les mathématiciens adoptent des démarches complémentaires pour y répondre. Il s'agit, dans un premier temps, de décrire qualitativement la dynamique du fluide. Cela passe par la mise en place de modèles simplifiés. Il s'agit ensuite, de valider mathématiquement de tels modèles, à travers une analyse asymptotique.

On s'est intéressé dans un premier temps à la mise en place des équations modélisant l'évolution d'un fluide en rotation et d'un fluide soumis à un champ magnétique, pour montrer leur points communs qui sont à l'origine de nombreuses ressemblances entre les deux types d'écoulement. Dans une deuxième partie, on s'est attaché à décrire la méthode de dérivation des couches limites, sans entrer dans tous les détails d'une justification mathématique rigoureuse. On en a déduit un profil de vitesse approché qui nous a permis de voir les différents phénomènes physiques se produisant. Dans une dernière partie, on s'est intéressé à la résolution numérique des équations : après une première familiarisation avec les équations au laplacien et la méthode des différences finies, nous avons retrouvé numériquement les prévisions de la deuxième partie.

1 Les équations du problème

On met ici en place les équations vérifiées par le champ de vitesse et qui feront l'objet des parties suivantes. On aborde dans un premier temps deux situations, le cas d'un fluide en rotation et le cas d'un fluide soumis à un champ magnétique, pour montrer leurs similitudes. On se limitera cependant, par la suite, à la seule étude du cas du fluide en rotation.

1.1 Équation du mouvement, Navier-Stokes

On considère un fluide homogène, incompressible, de masse volumique ρ . Nous allons redériver l'équation de Navier-Stokes et l'appliquer dans le cas d'un fluide conducteur en rotation.

L'incompressibilité du fluide se traduit par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

où \vec{u} est le champ de vitesse.

En utilisant la convention de sommation sur les indices répétés, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{d\rho u_i}{dt} = \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i,$$

où σ_{ij} est le tenseur des contraintes et f_i la $i^{\text{ème}}$ composante de la résultante des forces volumiques.

On suppose le fluide newtonien, de sorte que le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du gradient de vitesse. En tenant compte de l'incompressibilité, la loi de comportement du fluide s'écrit alors

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u),$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique et ε_{ij} est le tenseur des vitesses de déformation défini par

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right) &= -\frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}(u)}{\partial x_j} + f_i, \\ \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + f_i. \end{aligned}$$

En utilisant l'incompressibilité du fluide, il vient

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{=0} + f_i.$$

Ce qui s'écrit encore sous forme tensorielle (équation de Navier-Stokes)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}, \quad (2)$$

où on a posé $\nu = \mu/\rho$, appelée viscosité cinématique. Dans le cas où le fluide est de l'eau on a $\mu = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, et dans le cas du noyau liquide de la Terre, $\mu = 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

1.2 Cas d'un fluide en rotation

Le terme \vec{f} dans (2) regroupe l'ensemble des densités de forces en volume. Dans le cas d'un fluide en rotation à la vitesse $\vec{\Omega}$, on adopte une description dans le référentiel tournant, il faut donc ajouter les "pseudo-forces" d'inertie :

- l'inertie centrifuge, $-\rho\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$, si \vec{r} repère la position par rapport à un point de l'axe de rotation. On adoptera par la suite $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ et on notera simplement \vec{e} , le vecteur \vec{e}_z , lorsque cela ne porte pas à confusion. Dans ce cas, si on note s le rayon cylindrique, (i.e. la distance à l'axe de rotation) et \vec{e}_s le vecteur radial, on a

$$-\rho\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = s\Omega^2\vec{e}_s = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\Omega^2 s^2) .$$

On peut donc écrire le terme d'accélération centrifuge sous la forme d'un gradient et le regrouper dans le gradient de pression ;

- l'accélération de Coriolis, $-2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -2\rho\Omega\vec{e} \wedge \vec{u}$.

Le champ de vitesse \vec{u} obéit alors aux équations

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{\vec{\nabla}\tilde{p}}{\rho} - \nu\Delta\vec{u} + 2\Omega\vec{e} \wedge \vec{u} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

où \tilde{t} est la variable de temps, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ la variable d'espace et \tilde{p} un terme de pression modifié incluant la force centrifuge.

Soient U et L des vitesse et longueur caractéristiques de l'écoulement. Après l'adimensionnement

$$\tilde{t} = \frac{L}{U}t, \quad \tilde{\mathbf{x}} = L\mathbf{x}, \quad \vec{u} = U\mathbf{u}, \quad \tilde{p} = 2\rho U\Omega Lp ,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \varepsilon(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - E\Delta \mathbf{u} + \mathbf{e} \times \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

où l'on a introduit le nombre de Rossby,

$$\varepsilon = \frac{UL^{-1}}{\Omega} ,$$

qui mesure le rapport entre vorticité relative et vorticité imposée, et le nombre d'Ekman,

$$E = \frac{\nu}{\Omega L^2}$$

qui compare forces visqueuses et force de Coriolis.

Dans le cas du noyau liquide de la Terre, on a $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $L = r_e = 3480 \text{ km}$ rayon externe du noyau, $U \sim 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, de sorte que $\varepsilon \sim 10^{-7}$ et $E \sim \varepsilon^2 \sim 10^{-15}$.

Ces valeurs très faibles posent des difficultés numériques considérables, d'où la nécessité d'obtenir des modèles simplifiés via une analyse asymptotique.

On étudiera aussi le cas d'une diffusion anisotrope modélisée par l'équation

$$\begin{cases} \varepsilon(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - E_H(\partial_x^2 \mathbf{u} + \partial_y^2 \mathbf{u}) - E_V \partial_z^2 \mathbf{u} + \mathbf{e} \times \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

où l'on a typiquement $E_H = \lambda\varepsilon$ et $E_V = \beta\varepsilon^2$.

L'étude des équations (4) et (5) se fera généralement sur un domaine borné Ω avec des conditions aux bords périodiques ou de Dirichlet, notamment des conditions de non glissement, $u = 0$. Sous certaines hypothèses et avec une donnée initiale u_0 , on montre par estimation d'énergie, l'existence de solutions globales (on renvoie à TEMAM [5]).

1.3 Cas d'un fluide conducteur soumis à un champ magnétique

Dans le cas d'un fluide conducteur parcouru par un courant \vec{j} , il subit la force de Laplace dont la densité de forces est

$$\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} .$$

La loi d'Ohm pour un conducteur électrique en mouvement s'écrit

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) ,$$

où σ est la conductivité électrique et \vec{E} le champ électrique. \vec{E} et \vec{B} vérifient les équations de Maxwell dans lesquelles on néglige les courants de déplacement. L'évolution du fluide est donc gouvernée par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} \tilde{p}}{\rho} - \nu \Delta \vec{u} - \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{\rho} = 0 \\ \vec{j} = \mu_0^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

On considérera le cas d'un champ magnétique imposé selon \vec{e} , de sorte que les perturbations pourront être considérées petites devant le champ imposé,

$$\vec{B} = B\vec{e} + \vec{b}, \text{ avec } \|\vec{b}\| \ll |B|, \|\partial_t \vec{b}\| \ll |\partial_t B| .$$

On peut alors simplifier le système (6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \rho^{-1} \vec{\nabla} \tilde{p} - \nu \Delta \vec{u} - \rho^{-1} B \vec{j} \wedge \vec{e} = 0 \\ \vec{j} = \sigma (-\vec{\nabla} \tilde{\varphi} + B \vec{u} \wedge \vec{e}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

où $\tilde{\varphi}$ est le potentiel électrique. Pour une frontière conductrice on aura la condition aux bords $\tilde{\varphi} = 0$ et pour une frontière isolante $\tilde{\varphi}' = 0$.

Si on note U une vitesse caractéristique de l'écoulement, avec $L = (\nu \rho)^{1/2} \sigma^{-1/2} B^{-1}$, on effectue l'adimensionnement suivant :

$$\tilde{t} = \frac{L}{U} t, \quad \tilde{x} = Lx, \quad \vec{u} = Uu, \quad \tilde{p} = \rho U^2 p, \quad \vec{j} = \sigma B U j, \quad \tilde{\varphi} = B U L \varphi ,$$

pour obtenir le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \frac{1}{R} (\Delta u + j \times e) \\ j = -\nabla \varphi + u \times e \\ \nabla \cdot j = 0 \quad \nabla \cdot u = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

où l'on a introduit le nombre de Reynolds,

$$R = \frac{UL}{\nu} = \left(\frac{\rho}{\sigma \nu} \right)^{1/2} \frac{U}{B} .$$

Dans le cas du noyau liquide de la Terre, on a $B = 5 \cdot 10^5 \text{ nT}$ au niveau du noyau, $\rho = 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\sigma = 7 \cdot 10^5 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, de sorte que $L \sim 0,2 \text{ m}$ et $R \sim 2$.

Dans le cas de la Terre, il y a en fait un couplage entre les deux phénomènes, la rotation et l'action du champ magnétique, c'est ce couplage qui rend particulièrement complexe l'étude de la dynamique dans le noyau, et, par la même occasion, la compréhension du moteur de la dynamo terrestre.

2 Dérivation des couches limites d'Ekman

On s'intéresse dans cette partie aux équations régissant l'évolution d'un fluide entre deux plans en rotation à grande vitesse, donc dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. On utilise la modélisation (5) avec $\lambda = 1$ et $\beta = 1$. On considère donc le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \Delta_{x,y} u - \varepsilon \partial_z^2 u + \frac{e \times u}{\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \quad \text{avec } \nabla \cdot u_0 = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

où $\Delta_{x,y} = \partial_x^2 + \partial_y^2$ et $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, h]$. Quitte à prendre h pour longueur caractéristique de l'écoulement, on peut supposer $h = 1$.

Les couches limites qui apparaissent à l'interface entre le fluide et le bord de Ω lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ s'appellent couches d'Ekman. Physiquement, ces couches proviennent d'une interaction entre la force de Coriolis $\frac{e \times u}{\varepsilon}$ et la viscosité $\varepsilon \partial_z^2 u$. En notant δ la taille des couches limites et U une vitesse typique de l'écoulement, ces termes sont d'ordre $\varepsilon^{-1}U$ et $\varepsilon \delta^{-2}U$. Il apparaît donc naturel de supposer que $\delta = \varepsilon$.

On renvoie à l'article écrit par E. GRENIER et N. MASMOUDI [7] pour une étude plus approfondie.

2.1 Développement asymptotique formel de la couche d'Ekman dans le cas d'une frontière plane

On cherche une solution approchée de (9) sous la forme d'un développement en puissances de ε

$$u_{app}^\varepsilon(t, x, y, z) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i U^i \left(t, x, y, z, \frac{z}{\varepsilon}, \frac{1-z}{\varepsilon} \right) \quad (10)$$

où les U^i , appelés "profils", sont de la forme

$$U^i(t, x, y, z, \theta, \lambda) = u^i(t, x, y, z) + \underline{u}^i(t, x, y, \theta) + \bar{u}^i(t, x, y, \lambda)$$

où l'on a posé $\theta = z/\varepsilon$ et $\lambda = (1-z)/\varepsilon$.

Les u^i , \underline{u}^i , \bar{u}^i modélisent le comportement du fluide respectivement à l'intérieur, dans la couche limite inférieure et dans la couche limite supérieure. En particulier, ils doivent vérifier

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \underline{u}^i(t, x, y, \theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{u}^i(t, x, y, \lambda) = 0$$

qui traduit le fait que les couches limites sont situées près des bords. On impose également

$$u^i(t, x, y, z=0) + \underline{u}^i(t, x, y, \theta=0) = 0$$

$$u^i(t, x, y, z=1) + \bar{u}^i(t, x, y, \lambda=0) = 0$$

ce qui, modulo de petites corrections, permet de satisfaire la condition d'adhérence.

De la même manière, on cherche un développement de la pression sous la forme

$$p_{app}^\varepsilon(t, x, y, z) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i P^i \left(t, x, y, z, \frac{z}{\varepsilon}, \frac{1-z}{\varepsilon} \right) \quad (11)$$

$$P^i(t, x, y, z, \theta, \lambda) = p^i(t, x, y, z) + \underline{p}^i \left(t, x, y, \frac{z}{\varepsilon} \right) + \bar{p}^i \left(t, x, y, \frac{1-z}{\varepsilon} \right) .$$

On injecte alors les développements (10), (11) dans le système (9), on regroupe les termes de chaque équation par puissance de ε , et on annule les coefficients devant chaque puissance.

A l'ordre ε^{-2} , on obtient dans la couche limite située en $z = 0$

$$e \times \underline{u}^0 + \nabla \underline{p}^0 = 0$$

puis

$$\partial_\theta \underline{p}^0 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{p}^0 = 0 .$$

Ansî la pression ne change pas dans les couches limites à l'ordre 0.

Toujours à l'ordre ε^{-2} , on obtient à l'intérieur

$$e \times u^0 + \nabla p^0 = 0$$

dont on déduit que p^0 puis u_1^0 et u_2^0 ne dépendent pas de z puisque

$$0 = -\partial_z p^0, \quad -u_2^0 = -\partial_x p^0, \quad u_1^0 = -\partial_y p^0 .$$

On déduit aussi que

$$\partial_x u_1^0 + \partial_y u_2^0 = 0 . \tag{12}$$

A l'ordre ε^{-1} , dans la couche limite la condition d'incompressibilité donne

$$\partial_\theta \underline{u}_3^0 = 0 \quad \text{puis} \quad \underline{u}_3^0 = 0 , \tag{13}$$

la composante verticale de la vitesse n'est donc pas modifiée dans la couche limite à l'ordre 0.

A l'intérieur, la condition d'incompressibilité donne

$$\partial_x u_1^0 + \partial_y u_2^0 + \partial_z u_3^0 = 0 ,$$

ce qui, combiné à (12), donne $\partial_z u_3^0 = 0$. Puisque $\underline{u}_3^0 = 0$ d'après (13), la condition aux bords imposée en $z = 0$ donne $u_3^0 = 0$.

Il reste alors à déterminer le système vérifié par les composantes horizontales

$$u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0(t, x, y) \\ u_2^0(t, x, y) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Toujours à l'ordre ε^{-1} , on a

$$\partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 - \Delta_{x,y} u^0 + e \times u^1 + \nabla p^1 = 0 .$$

On en déduit que le rotationnel $\xi = \partial_x u_2^0 - \partial_y u_1^0$ vérifie l'équation

$$\partial_t \xi + u^0 \cdot \nabla \xi - \Delta_{x,y} \xi = -\partial_x u_1^1 - \partial_y u_2^1 = \partial_z u_3^1$$

où l'on a utilisé que $\nabla \cdot u^1 = 0$.

En se rappelant que le membre de gauche est indépendant de z puisque u_1^0 et u_2^0 le sont, et en intégrant de $z = 0$ à $z = 1$, on obtient l'équation

$$\partial_t \xi + u^0 \cdot \nabla \xi - \Delta_{x,y} \xi = u_3^1(z = 1) - u_3^1(z = 0) ,$$

ce qui s'écrit encore, en tenant compte des conditions imposées aux bords,

$$\partial_t \xi + u^0 \cdot \nabla \xi - \Delta_{x,y} \xi = \underline{u}_3^1(t, x, y, \theta = 0) - \bar{u}_3^1(t, x, y, \lambda = 0) . \tag{14}$$

On voit apparaître un terme de forçage dans l'équation régissant l'évolution de u^0 . On va donc s'intéresser au profil de vitesse dans la couche limite.

2.2 Profil de vitesse dans la couche limite

A l'ordre ε^{-1} , de la condition d'incompressibilité dans la couche limite on a déduit (cf. (13)) que $\underline{u}_3^0 = 0$. Les autres équations donnent le système différentiel

$$\begin{aligned}\partial_\theta^2 \underline{u}_1^0 + \underline{u}_2^0 &= 0 \\ \partial_\theta^2 \underline{u}_2^0 - \underline{u}_1^0 &= 0\end{aligned}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{aligned}\underline{u}_1^0(t, x, y, \theta = 0) &= -u_1^0(t, x, y), & \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \underline{u}_1^0(t, x, y, \theta) &= 0 \\ \underline{u}_2^0(t, x, y, \theta = 0) &= -u_2^0(t, x, y), & \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \underline{u}_2^0(t, x, y, \theta) &= 0\end{aligned}$$

En posant $X = \underline{u}_1^0 + i\underline{u}_2^0$, on obtient

$$\partial_\theta^2 X - iX = 0,$$

puis

$$(\underline{u}_1^0 + i\underline{u}_2^0)(t, x, y, \theta) = -(u_1^0 + iu_2^0)(t, x, y) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\theta\right).$$

D'où finalement

$$\begin{cases} \underline{u}_1^0(t, x, y, \theta) = -e^{-\frac{\theta}{\sqrt{2}}} \left(u_1^0(t, x, y) \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) + u_2^0(t, x, y) \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \right) \\ \underline{u}_2^0(t, x, y, \theta) = -e^{-\frac{\theta}{\sqrt{2}}} \left(u_2^0(t, x, y) \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) - u_1^0(t, x, y) \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \right) \end{cases}$$

Puisque $\underline{u}_3^0 = 0$, intéressons nous à la perturbation à l'ordre 1 de la composante verticale, \underline{u}_3^1 . A l'ordre ε^0 , la condition d'incompressibilité dans la couche limite s'écrit

$$\partial_x \underline{u}_1^0 + \partial_y \underline{u}_2^0 + \partial_\theta \underline{u}_3^1 = 0.$$

En reportant les expressions de \underline{u}_1^0 et \underline{u}_2^0 et en utilisant (12), on obtient

$$\partial_\theta \underline{u}_3^1 = e^{-\frac{\theta}{\sqrt{2}}} (\partial_x u_2^0 - \partial_y u_1^0) \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right),$$

puis en intégrant

$$\underline{u}_3^1(t, x, y, \theta) = -\frac{e^{-\frac{\theta}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} (\partial_x u_2^0 - \partial_y u_1^0)(t, x, y) \left(\sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} \underline{u}_1^0(t, x, y, z) = -e^{-\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}} \left(u_1^0(t, x, y) \cos\left(\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) + u_2^0(t, x, y) \sin\left(\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) \right) \\ \underline{u}_2^0(t, x, y, z) = -e^{-\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}} \left(u_2^0(t, x, y) \cos\left(\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) - u_1^0(t, x, y) \sin\left(\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) \right) \\ \underline{u}_3^1(t, x, y, z) = -\frac{e^{-\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} (\partial_x u_2^0 - \partial_y u_1^0)(t, x, y) \left(\sin\left(\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) \right) \end{cases}$$

Les mêmes calculs pour la couche supérieure conduisent à

$$\begin{cases} \bar{u}_1^0(t, x, y, z) = -e^{-\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}} \left(u_1^0(t, x, y) \cos\left(\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) + u_2^0(t, x, y) \sin\left(\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) \right) \\ \bar{u}_2^0(t, x, y, z) = -e^{-\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}} \left(u_2^0(t, x, y) \cos\left(\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) - u_1^0(t, x, y) \sin\left(\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) \right) \\ \bar{u}_3^1(t, x, y, z) = \frac{e^{-\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} (\partial_x u_2^0 - \partial_y u_1^0)(t, x, y) \left(\sin\left(\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{1-z}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) \right) \end{cases}$$

On obtient alors

$$\underline{u}_3^1(t, x, y, \theta = 0) - \bar{u}_3^1(t, x, y, \lambda = 0) = -\sqrt{2}\xi . \quad (15)$$

En revenant à l'équation (14), il vient

$$\partial_t \xi + u^0 \cdot \nabla \xi - \Delta_{x,y} \xi + \sqrt{2}\xi = 0 .$$

En tenant compte du fait que u_0 s'écrivent

$$u^0 = \nabla^\perp p^0 \quad \text{où } \nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x, 0) ,$$

et par un argument d'unicité, on obtient que le système vérifié par u_0 est finalement

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 - \Delta_{x,y} u^0 + \sqrt{2}u^0 + \nabla q = 0 \\ u^0 = \nabla^\perp \Psi \end{cases} \quad (16)$$

Ainsi u_0 satisfait une équation de Navier-Stokes à deux dimensions avec un terme d'amortissement supplémentaire $\sqrt{2}u^0$ (on rappelle que $u_3^0 = 0$).

Contenu physique

Discutons désormais du contenu physique de ces résultats. Les expressions de \underline{u}_1^0 et \underline{u}_2^0 , ainsi que \bar{u}_1^0 et \bar{u}_2^0 , montrent que le champ de vitesse dans la couche limite tourne en fonction de z : on parle de spirale d'Ekman. Cela permet d'expliquer la rotation du vent avec l'altitude, observée dans la couche limite atmosphérique.

La dérivation du modèle d'Ekman illustre une propriété essentielle des couches limites en mécanique des fluides : *le mouvement du fluide dans la couche limite a des répercussions sur l'écoulement bien au-delà du voisinage du bord*. Cette caractéristique apparaît à travers le terme $\sqrt{2}u^0$ du système (16) qui traduit une dissipation d'énergie dans la couche limite par friction, ainsi qu'à travers l'équation (15) dont découle

$$u_3^1(t, x, y, 1) - u_3^1(t, x, y, 0) = \sqrt{2}\xi(t, x, y) .$$

Cette dernière équation signifie que du fluide rentre ou sort des couches limites : les couches limites induisent donc une circulation secondaire d'ordre ε dans le cœur du fluide. Ce phénomène est connu sous le nom de pompage d'Ekman. Il a de multiples conséquences physiques.

Un exemple classique est celui dit de la tasse de thé. Lorsque l'on agite le thé dans une tasse avec une cuillère en lui donnant un mouvement globalement circulaire, on constate que les feuilles tombées au fond se rassemblent invariablement au centre de la tasse, alors qu'intuitivement on s'attendrait à ce que des effets centrifuges les séparent et les entraînent à la périphérie. Au fond des océans, le pompage dans les couches d'Ekman a également des répercussions : dans les zones de pompage ascendant, il fait remonter en surface les réserves nutritives accumulées en profondeur, les zones concernées sont ainsi propices à la pêche. Ainsi, connaître les propriétés de la couche limite donne des renseignements à l'échelle globale.

2.3 Convergence et généralisation

Il reste désormais à valider la dérivation ci-dessus : il faut montrer que les solutions approchées sont proches de vraies solutions du système (9). Cette étude a été réalisée par E. GRENIER et N. MASMOUDI dans [7]. Les différentes estimations réalisées sortent du cadre de ce stage, on se limitera à une brève description du schéma directeur.

Soit u^0 une solution régulière du système (16) et u_{app}^ε la solution approchée donnée par (10). Celle-ci satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_{app}^\varepsilon + u_{app}^\varepsilon \cdot \nabla u_{app}^\varepsilon + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \Delta_{x,y} u_{app}^\varepsilon - \varepsilon \partial_z^2 u_{app}^\varepsilon + \frac{e \times u_{app}^\varepsilon}{\varepsilon} = R_1^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u_{app}^\varepsilon = R_2^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega \\ u_{app}^\varepsilon = R_3^\varepsilon \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où les R_i^ε peuvent être rendus arbitrairement petits dans un certain espace.

Pour montrer que u_{app}^ε est proche d'une vraie solution u^ε , il est naturel d'estimer la différence $v^\varepsilon = u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon$. La méthode consiste alors à écrire l'équation satisfaite par v^ε et à faire une estimation d'énergie L^2 sur ce système, c'est-à-dire estimer la quantité $\frac{1}{2} \|v^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$ par des majorations pour montrer que sous certaines conditions, elle tend vers 0 avec ε .

De nombreuses généralisations de cette étude sont possibles. David Gérard-Varet s'est notamment intéressé au cas d'un domaine rugueux. Il a ainsi mis en évidence une forte dépendance des systèmes couches limites vis-à-vis du domaine considéré : même pour des modifications faibles du cas plan standard, les dynamiques dans la couche limite et à l'intérieur sont changées. La difficulté principale vient du fait de l'apparition de plusieurs couches limites avec des échelles différentes. Il présente dans sa thèse *Etude mathématique et numérique des couches limites en mécanique des fluides* [3] une méthode générale de dérivation. La question de sa validation mathématique reste encore ouverte. L'étude des domaines rugueux possède de fortes motivations physiques : les frontières des domaines réalistes présentent, en effet, très souvent des irrégularités. Ceci est notamment le cas de l'interface noyau-manteau, dont l'étude présente une importance particulière pour la compréhension de l'effet Dynamo comme nous allons le voir.

Dans sa thèse *Modélisation numérique de la dynamo terrestre* [2], Emmanuel Dormy s'est intéressé à une étude physique des couches limites entre deux sphères en rotation différentielle. En effet, depuis 1981 on utilise un modèle de Terre en couches sphériques concentriques établi par des observations sismologiques. Il stipule que le champ magnétique terrestre est créé dans le noyau de la Terre, et plus particulièrement dans le noyau liquide qui se distingue de la partie centrale, la graine.

Les difficultés numériques liées à la petitesse du nombre d'Ekman, l'on amené à s'intéresser au modèle simplifié de l'écoulement fluide entre deux sphères en rotation rapide et légèrement différentielle : on notera Ω la rotation de la sphère externe de rayon r_e et $\Omega(1 + \varepsilon)$ celle de la sphère interne de rayon r_i .

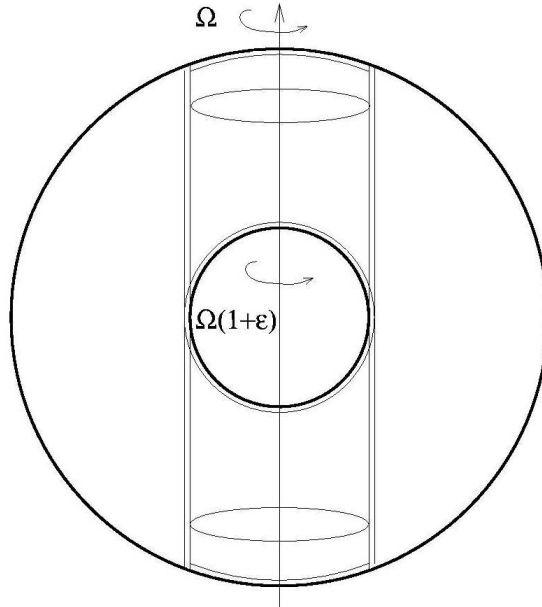


FIG. 1 – Sphères en rotation différentielle.

Les phénomènes de couches d'Ekman apparaissent ici au niveau du "cylindre tangent" représenté sur la figure 1. En effet, les cylindres dont le rayon est supérieur à r_i touchent la sphère externe aux deux extrémités, la solution asymptotique sera donc une rotation en bloc à la vitesse Ω . A l'intérieur du cylindre tangent la situation est différente, les cylindres coaxiaux "touchent" d'un côté la sphère externe et de l'autre la sphère interne, il y a donc un phénomène de transition.

On reproduit les résultats donnés par Emmanuel Dormy pour des nombres d'Ekman $E \leq 10^{-3}$.

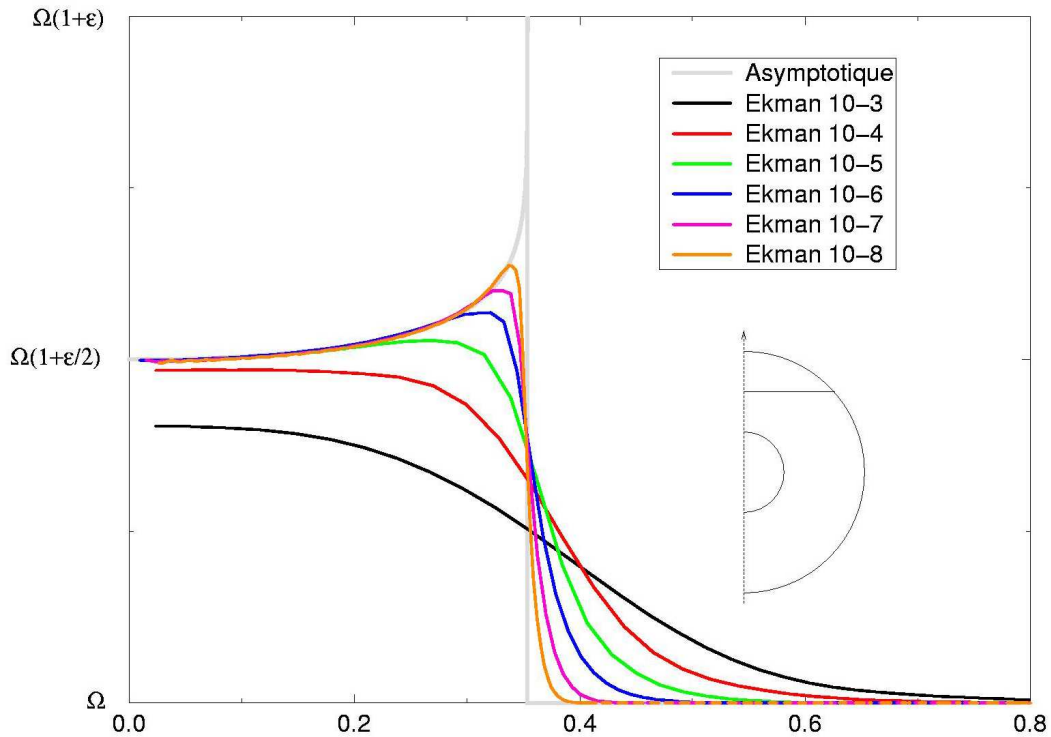


FIG. 2 – Représentation de la vitesse angulaire en fonction de la distance à l'axe de rotation.

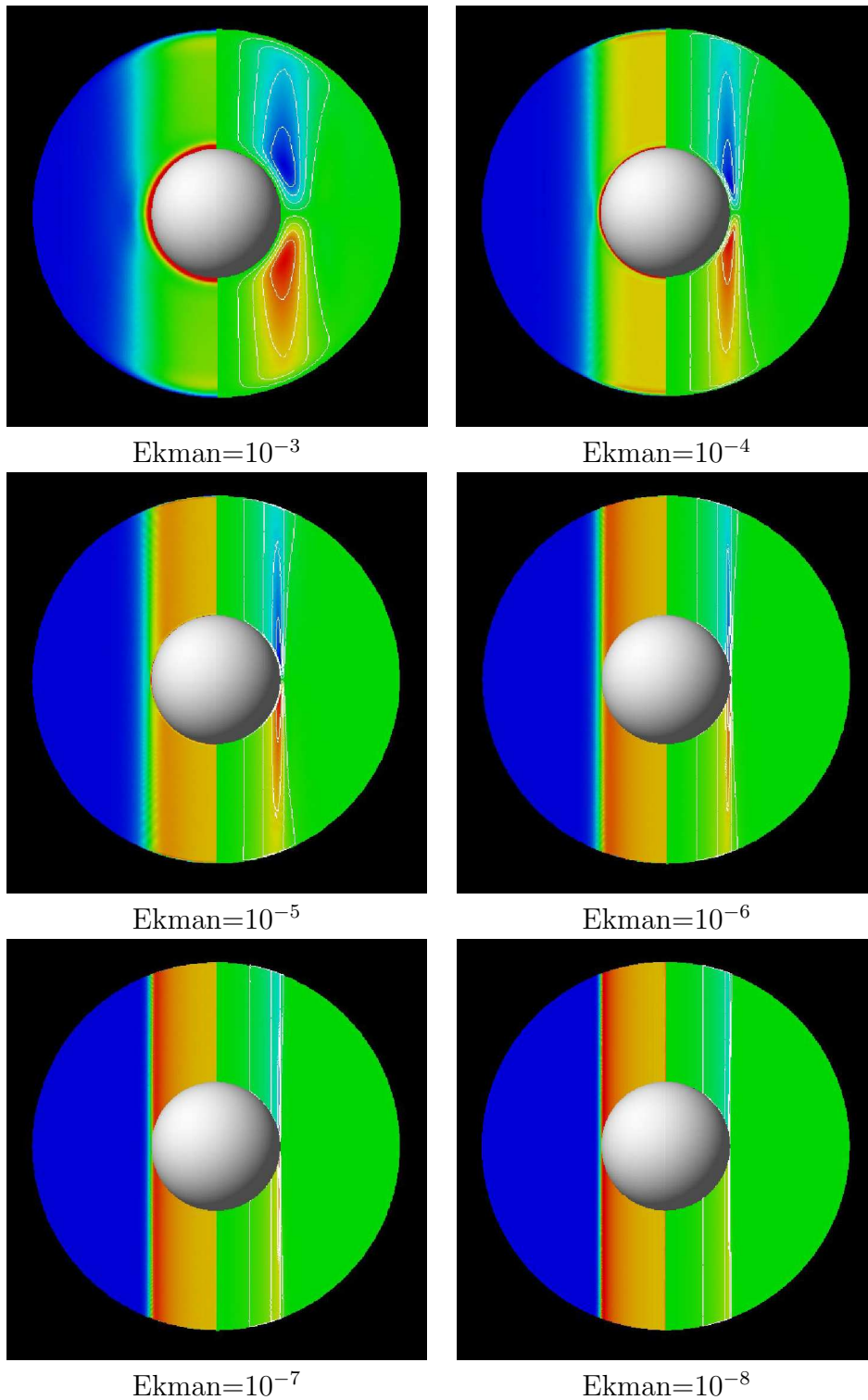


FIG. 3 – Vitesse angulaire (à gauche) et lignes de courant (à droite) dans un plan méridien pour différents nombres d’Ekman.

Pour mieux comprendre l’origine de la dynamo terrestre, il faut s’intéresser aux équations introduites dans la section 1.3. Les couches limites qui apparaissent en présence du seul champ magnétique sont appelées couches limites de Hartmann. Dans le cas de l’association des deux phénomènes, champ magnétique et rotation, on parle de couches limites d’Ekman-Hartmann. Elles font l’objet d’une étude approfondie dans la thèse d’Emmanuel Dormy, étude qui a été reprise mathématiquement par B. DESJARDINS, E. DORMY et E. GRENIER dans [1].

3 Modélisation numérique avec Matlab et Femlab

3.1 Un premier exemple simple : l'équation de Stokes

L'équation de Stokes modélise l'écoulement stationnaire d'un fluide homogène, incompressible. D'après la section 1.1, elle s'écrit :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

On s'intéresse à un cas simple à deux dimensions,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = p(x, y),$$

posé sur le rectangle $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ avec les conditions de Dirichlet

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad v(x, y) = v_0(x, y) \text{ si } (x, y) \in \partial\Omega.$$

Le système se réécrit

$$\begin{cases} -\mu(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) + \partial_x p = 0 \\ -\mu(\partial_{xx}v + \partial_{yy}v) + \partial_y p = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 \end{cases} \quad (18)$$

On utilise une méthode de différences finies décentrée. On considère la grille régulière formée par les $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ rectangles $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ où

$$\begin{aligned} xi &= a + ih_x, & h_x &= \frac{b-a}{N_x+1}, & i &= 0, \dots, N_x+1, \\ yj &= c + jh_y, & h_y &= \frac{d-c}{N_y+1}, & j &= 0, \dots, N_y+1. \end{aligned}$$

Rappelons un schéma classique de calcul du Laplacien en différence finies. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , un développement limité à l'ordre 2 nous donne

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2). \end{aligned}$$

Par sommation, on trouve donc

$$\begin{aligned} f(x+h) + f(x-h) &= 2f(x) + h^2f''(x) + o(h^2), \\ f''(x) &= \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + o(1). \end{aligned}$$

D'où l'idée, couramment utilisée, de remplacer le terme $f''(x)$ par le rapport

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}. \quad (19)$$

La méthode est dite décentrée car u , v et p ne seront pas calculées sur les points de la grille pour des raisons de symétrie. On notera

$$\begin{aligned} u_{i,j+1/2} &\approx u(x_i, y_{j+1/2}), & i &= 0, \dots, N_x+1, & j &= 0, \dots, N_y, \\ v_{i+1/2,j} &\approx v(x_{i+1/2}, y_j), & i &= 0, \dots, N_x, & j &= 0, \dots, N_y+1, \\ p_{i+1/2,j+1/2} &\approx p(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}), & i &= 0, \dots, N_x, & j &= 0, \dots, N_y. \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation (19), on obtient le schéma numérique

$$\mu \left(\frac{2u_{i,j+1/2} - u_{i-1,j+1/2} - u_{i+1,j+1/2}}{h_x^2} + \frac{2u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2} - u_{i,j+3/2}}{h_y^2} \right) + \frac{p_{i+1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j+1/2}}{h_x} = 0$$

$$i = 1, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_y$$

$$\mu \left(\frac{2v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j} - v_{i+3/2,j}}{h_x^2} + \frac{2v_{i+1/2,j} - v_{i+1/2,j-1} - v_{i+1/2,j+1}}{h_y^2} \right) + \frac{p_{i+1/2,j+1/2} - p_{i+1/2,j-1/2}}{h_y} = 0$$

$$i = 0, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y$$

$$\frac{u_{i+1,j+1/2} - u_{i,j+1/2}}{h_x} + \frac{v_{i+1/2,j+1} - v_{i+1/2,j}}{h_y} = 0 \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_y .$$

En posant

$$U = \begin{pmatrix} U_{1/2} \\ \vdots \\ U_{j+1/2} \\ \vdots \\ U_{N_y+1/2} \end{pmatrix}, \quad U_{j+1/2} = \begin{pmatrix} u_{1,j+1/2} \\ \vdots \\ u_{i,j+1/2} \\ \vdots \\ u_{N_x,j+1/2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{1/2} \\ \vdots \\ V_{i+1/2} \\ \vdots \\ V_{N_x+1/2} \end{pmatrix}, \quad V_{i+1/2} = \begin{pmatrix} v_{i+1/2,1} \\ \vdots \\ v_{i+1/2,j} \\ \vdots \\ v_{i+1/2,N_y} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{1/2} \\ \vdots \\ P_{j+1/2} \\ \vdots \\ P_{N_y+1/2} \end{pmatrix}, \quad P_{j+1/2} = \begin{pmatrix} p_{1/2,j+1/2} \\ \vdots \\ p_{i+1/2,j+1/2} \\ \vdots \\ p_{N_x+1/2,j+1/2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix},$$

le schéma se ramène à la résolution d'un système du type $AX = Y$ où Y est une matrice traduisant les conditions aux bords. La matrice A n'est pas inversible, on peut montrer que son noyau est engendré par $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^T$, ce qui traduit que la pression est définie à une constante près. On cherche une solution par la méthode du gradient conjugué.

On admet la convergence du schéma pour $N_x, N_y \rightarrow \infty$. Il est alors facile de programmer l'algorithme en Matlab. `tridiag(D,L,U,n)` est une fonction annexe qui rend une matrice tridiagonale par blocs, formée de $n \times n$ blocs.

```
function stokes(a,b,c,d,nx,ny,nu,u0,v0)
```

```
% initialisation de la grille
```

```
hx=(b-a)/(nx+1);hy=(d-c)/(ny+1); [x,y]=meshgrid(a:hx:b,c:hy:d);
[xp,yp]=meshgrid((a+hx/2):hx:(b-hx/2),(c+hy/2):hy:(d-hy/2));
xi=x(1,(1:(nx+2)));yj=y((1:(ny+2)),1)';
xip=xp(1,(1:(nx+1)));yjp=yp((1:(ny+1)),1)';
```

```
% construction de la matrice A et du vecteur Y
```

```
B1=nu*tridiag(2/hx^2+2/hy^2,-1/hx^2,-1/hx^2,nx);
C1=-nu/hy^2*eye(nx); A1=tridiag(B1,C1,C1,ny+1);
E1=1/hx*([-eye(nx),zeros(nx,1)]+[zeros(nx,1),eye(nx)]);
D1=tridiag(E1,zeros(nx,nx+1),zeros(nx,nx+1),ny+1);
U0=nu/hx^2*[feval(u0,xi(1),yjp(1));zeros(nx-2,1);feval(u0,xi(nx+2),yjp(1))]
+nu/hy^2*(feval(u0,xi(2:(nx+1)),yj(1)))';
```

```

for j=1 :(ny-1)
    U0=[U0;nu/hx^2*[feval(u0,xi(1),yjp(j+1));
                zeros(nx-2,1);
                feval(u0,xi(nx+2),yjp(j+1))]];
end
U0=[U0;nu/hx^2*[feval(u0,xi(1),yjp(ny+1));
                zeros(nx-2,1);
                feval(u0,xi(nx+2),yjp(ny+1))]
    +nu/hy^2*(feval(u0,xi(2:(nx+1)),yj(ny+2)))'];

B2=nu*tridiag(2/hx^2+2/hy^2,-1/hx^2,-1/hx^2,nx+1);
C2=-nu/hy^2*eye(nx+1); A2=tridiag(B2,C2,C2,ny);
D2=1/hy*[tridiag(-eye(nx+1),zeros(nx+1),eye(nx+1),ny),[zeros((ny-1)*(nx+1),nx+1);
                eye(nx+1)]]];

V0=nu/hy^2*(feval(v0,xip(1:(nx+1)),yj(1)))'
    +nu/hx^2*[feval(v0,xi(1),yj(2));zeros(nx-1,1);feval(v0,xi(nx+2),yjp(2))]];
for j=2 :(ny-1)
    V0=[V0;nu/hx^2*[feval(v0,xi(1),yj(j+1));
                zeros(nx-1,1);
                feval(v0,xi(nx+2),yjp(j+1))]];
end
V0=[V0;nu/hx^2*[feval(v0,xi(1),yj(ny+1));
                zeros(nx-1,1);
                feval(v0,xi(nx+2),yj(ny+1))]
    +nu/hy^2*(feval(v0,xip(1:(nx+1)),yj(ny+2)))'];

E1c=-E1'; D1c=tridiag(E1c,zeros(nx+1,nx),zeros(nx+1,nx),ny+1);
D2c=[tridiag(eye(nx+1),-eye(nx+1),zeros(nx+1),ny);
    [zeros(nx+1,(ny-1)*(nx+1)),eye(nx+1)]];
B=1/hx*[feval(u0,xi(1),yjp(1));zeros(nx-1,1);-feval(u0,xi(nx+2),yjp(1))]
    +1/hy*(feval(v0,xip(1:(nx+1)),yj(1)))';
for j=2 :ny
    B=[B;1/hx*[feval(u0,xi(1),yjp(j));zeros(nx-1,1);-feval(u0,xi(nx+2),yjp(j))]];
end
B=[B;1/hx*[feval(u0,xi(1),yjp(ny+1));zeros(nx-1,1);-feval(u0,xi(nx+2),yjp(ny+1))]
    -1/hy*(feval(v0,xip(1:(nx+1)),yj(ny+2)))'];

A=[A1,zeros((ny+1)*nx,ny*(nx+1)),D1;
    zeros(ny*(nx+1),(ny+1)*nx),A2,D2;
    D1c,D2c,zeros((ny+1)*(nx+1),(ny+1)*(nx+1))];
Y=[U0;V0;B];

% resolution du systeme AX=Y
X=bicg(A,Y,1e-5,1000);

% collecte des donnees
U=X(1:(nx*(ny+1))); V=X((nx*(ny+1)+1):(nx*(ny+1)+ny*(nx+1)));
P=X((nx*(ny+1)+ny*(nx+1)+1):(nx*(ny+1)+ny*(nx+1)+(ny+1)*(nx+1)));

```

```

Um=zeros(size(x));
for i=1 :nx
    Um(2:(ny+1),i+1)=1/2*(U(i:nx:(i+nx*(ny-1)))+U((i+nx):nx:(i+nx*ny)));
end
Um(1:(ny+2),1)=(feval(u0,xi(1),yj(1:(ny+2))))';
Um(1:(ny+2),nx+2)=(feval(u0,xi(nx+2),yj(1:(ny+2))))';
Um(1,2:(nx+1))=(feval(u0,xi(2:(nx+1)),yj(1)));
Um(ny+2,2:(nx+1))=(feval(u0,xi(2:(nx+1)),yj(1)));

Vm=zeros(size(x));
for j=1 :ny
    Vm(j+1,2:(nx+1))=(1/2*(V(j:ny:(j+ny*(nx-1)))+V((j+ny):ny:(j+ny*nx))))';
end
Vm(1:(ny+2),1)=(feval(v0,xi(1),yj(1:(ny+2))))';
Vm(1:(ny+2),nx+2)=(feval(v0,xi(nx+2),yj(1:(ny+2))))';
Vm(1,2:(nx+1))=(feval(v0,xi(2:(nx+1)),yj(1)));
Vm(ny+2,2:(nx+1))=(feval(v0,xi(2:(nx+1)),yj(1)));

Pm=zeros(size(xp));
for j=0 :ny
    Pm(j+1,1:(nx+1))=(P((nx+1)*j+1:((nx+1)*(j+1))))';
end

% champ de vecteurs
subplot(2,1,1); quiver(x,y,Um,Vm)

% lignes isobares
subplot(2,1,2); contour(xp,yp,Pm,10)

```

On s'intéresse au cas particulier de l'écoulement de Poiseuille, c'est-à-dire à l'écoulement d'un fluide dans une conduite. On prend pour domaine Ω , le rectangle $[0, 2] \times [0, 1]$. On a la condition de non glissement pour les parois horizontales et les profils d'entrée et de sortie sont de type parabolique.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} u_0(x, y) = Ky(1 - y) \\ v_0(x, y) = 0 \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} u_0(x, y) = 0, v_0(x, y) = 0 \\ \boxed{} \\ u_0(x, y) = 0, v_0(x, y) = 0 \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} u_0(x, y) = Ky(1 - y) \\ v_0(x, y) = 0 \end{array}
 \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que la solution est

$$\begin{cases} u(x, y) = Ky(1 - y) \\ v(x, y) = 0 \\ p(x, y) = -2\mu Kx + p_0 \end{cases}$$

Avec $K = 1$, $\mu = 100$, $N_x = 30$ et $N_y = 20$, on obtient

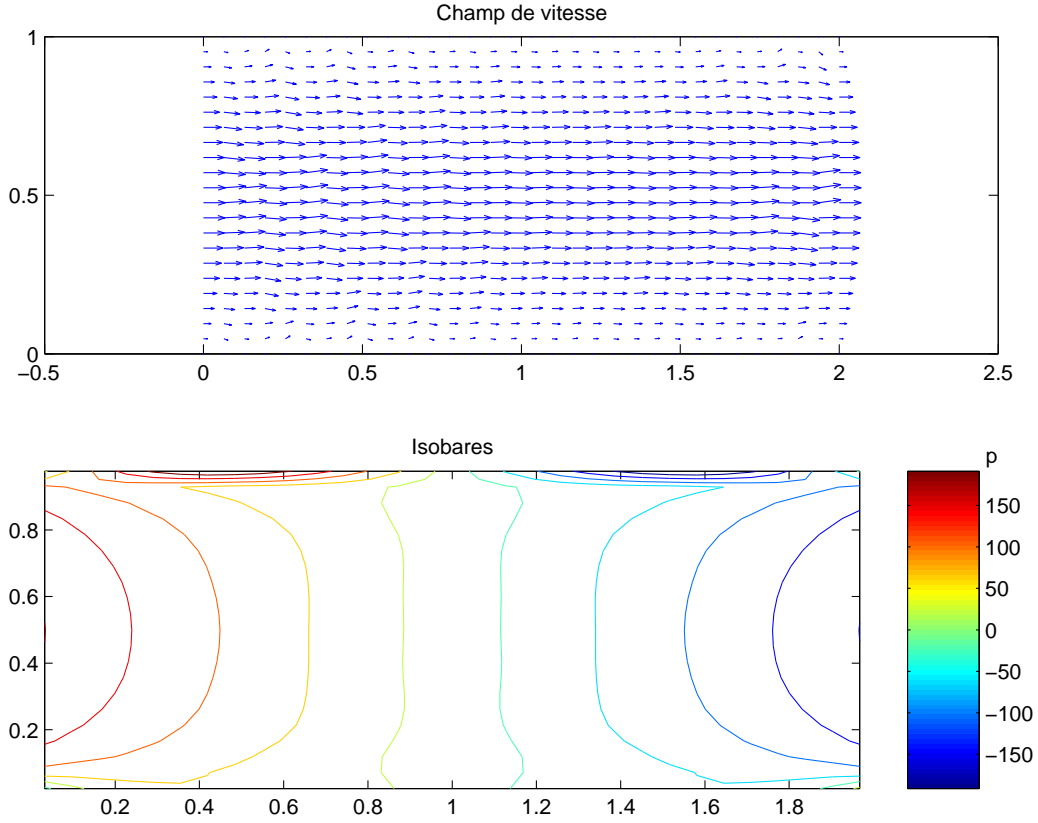


FIG. 4 – Écoulement de Poiseuille.

Les résultats numériques sont donc en parfait accord avec l'expression analytique.

3.2 La couche limite d'Ekman

Après cette première modélisation, nous avons décidé de nous intéresser au phénomène de couches limites entre deux plans en rotation à grande vitesse. On utilise à nouveau la modélisation (5) avec $\lambda = 1$ et $\beta = 1$. On considère donc le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \Delta_{x,y} u - \varepsilon \partial_z^2 u + \frac{e \times u}{\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \quad \text{avec } \nabla \cdot u_0 = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

où $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$.

Pour simplifier la résolution, on se ramène à un problème 2D en supposant que u et p sont indépendants de y . Cette hypothèse est pertinente dès lors que la condition initiale et la condition aux bords la vérifie. L'étude se ramène donc au domaine $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \times [0, 1]$. Pour se ramener à un domaine borné, on se restreint à $\hat{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ en imposant une condition de périodicité aux bords,

$$u(x = 0, z) = u(x = 1, z), \quad p(x = 0, z) = p(x = 1, z) \quad \forall z \in [0, 1].$$

On s'intéresse, dans un premier temps, à la solution stationnaire sans le terme non-linéaire. Le système s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \partial_x^2 u - \varepsilon \partial_z^2 u + \frac{e \times u}{\varepsilon} = 0 & \text{dans } [0, 1] \times [0, 1] \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, z = 0) = u(x, z = 1) = 0 & \forall x \in [0, 1] \\ u(x = 0, z) = u(x = 1, z) & \forall z \in [0, 1] \\ p(x = 0, z) = p(x = 1, z) & \forall z \in [0, 1] \end{cases} \quad (21)$$

On impose la valeur asymptotique de la vitesse dans l'écoulement principal,

$$u^{lim} = \begin{pmatrix} u_1^{lim} \\ u_2^{lim} \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on fait l'hypothèse que l'écoulement principal fixe le gradient de pression. Cela revient à imposer un gradient de pression dans l'équation, qui s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\nabla \tilde{p}}{\varepsilon} - \partial_x^2 u - \varepsilon \partial_z^2 u + \frac{e \times u}{\varepsilon} = \frac{e \times u^{lim}}{\varepsilon} \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Nous nous sommes d'abord orientés vers une résolution par différences finies, comme dans le cas précédent, mais plusieurs difficultés se sont présentées notamment la manière de gérer la condition de périodicité. Après plusieurs tentatives infructueuses, nous avons donc opté pour une résolution par éléments finis à l'aide du logiciel Femlab.

Une première simulation nous a enseigné que $\tilde{p} = 0$, que la solution était indépendante de x et que $u_3 = 0$. En effet, si on pose

$$u = u^{lim} + u^{cl}(z) \quad \text{avec} \quad u^{cl}(z) = \begin{pmatrix} u_1^{cl}(z) \\ u_2^{cl}(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1^{cl}}{dz^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} u_2^{cl} = 0 \\ \frac{d^2 u_2^{cl}}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} u_1^{cl} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

avec les conditions $u_1^{cl}(0) = u_1^{cl}(1) = -u_1^{lim}$ et $u_2^{cl}(0) = u_2^{cl}(1) = -u_2^{lim}$.

La solution s'écrit

$$\begin{aligned} u_1^{cl}(z) &= f(z) + f(1-z) \\ u_2^{cl}(z) &= -\varepsilon^2 (f''(z) + f''(1-z)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon}}} \left(\lambda^\varepsilon \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + \mu^\varepsilon \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) \right) \\ \lambda^\varepsilon &= -\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_2^{lim} + e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_1^{lim} + u_1^{lim}}{e^{\frac{2}{\sqrt{2\varepsilon}}} + 2e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + 1} \\ \mu^\varepsilon &= \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_2^{lim} - e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_1^{lim} + u_2^{lim}}{e^{\frac{2}{\sqrt{2\varepsilon}}} + 2e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + 1} \end{aligned}$$

On représente la solution pour $u_1^{lim} = 1$, $u_2^{lim} = 0$ et $\varepsilon = 10^{-2}$. On retrouve la localisation de la couche limite au voisinage des bords ainsi que la spirale d'Ekman.

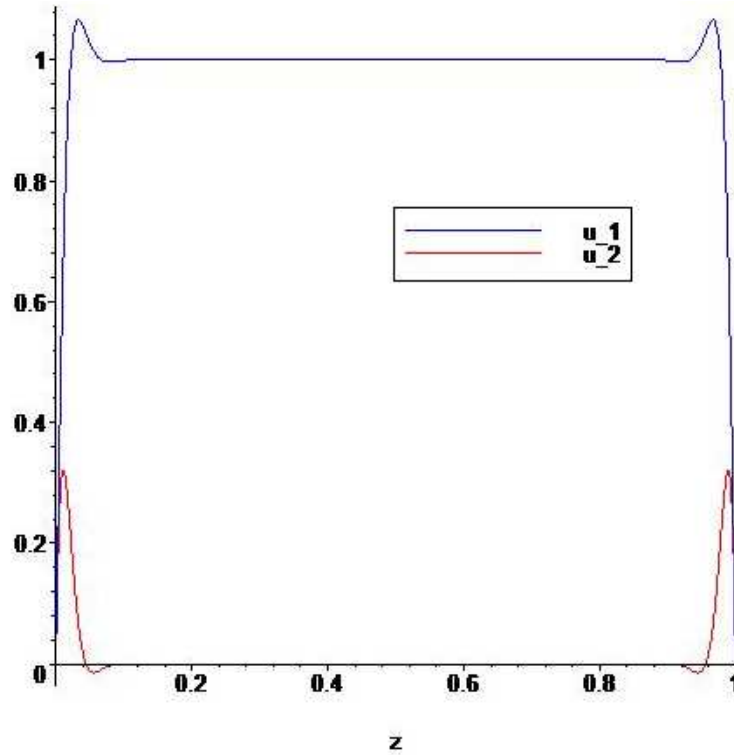


FIG. 5 – Représentation de la vitesse en fonction de la hauteur.

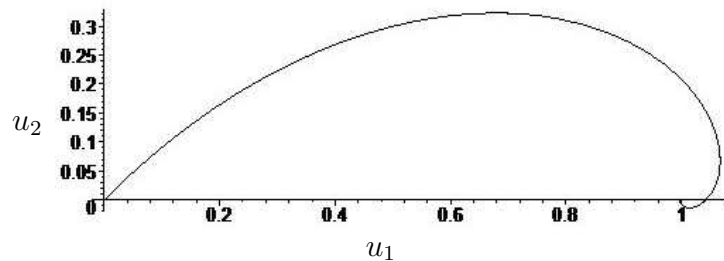


FIG. 6 – Représentation paramétrique de (u_1, u_2) - Spirale d'Ekman.

Revenons à la modélisation numérique sous Femlab. On utilise le module *PDE, General form* avec 4 variables, u_1 , u_2 , u_3 et p . On donne les résultats obtenus pour ε compris entre 1 et 10^{-5} .

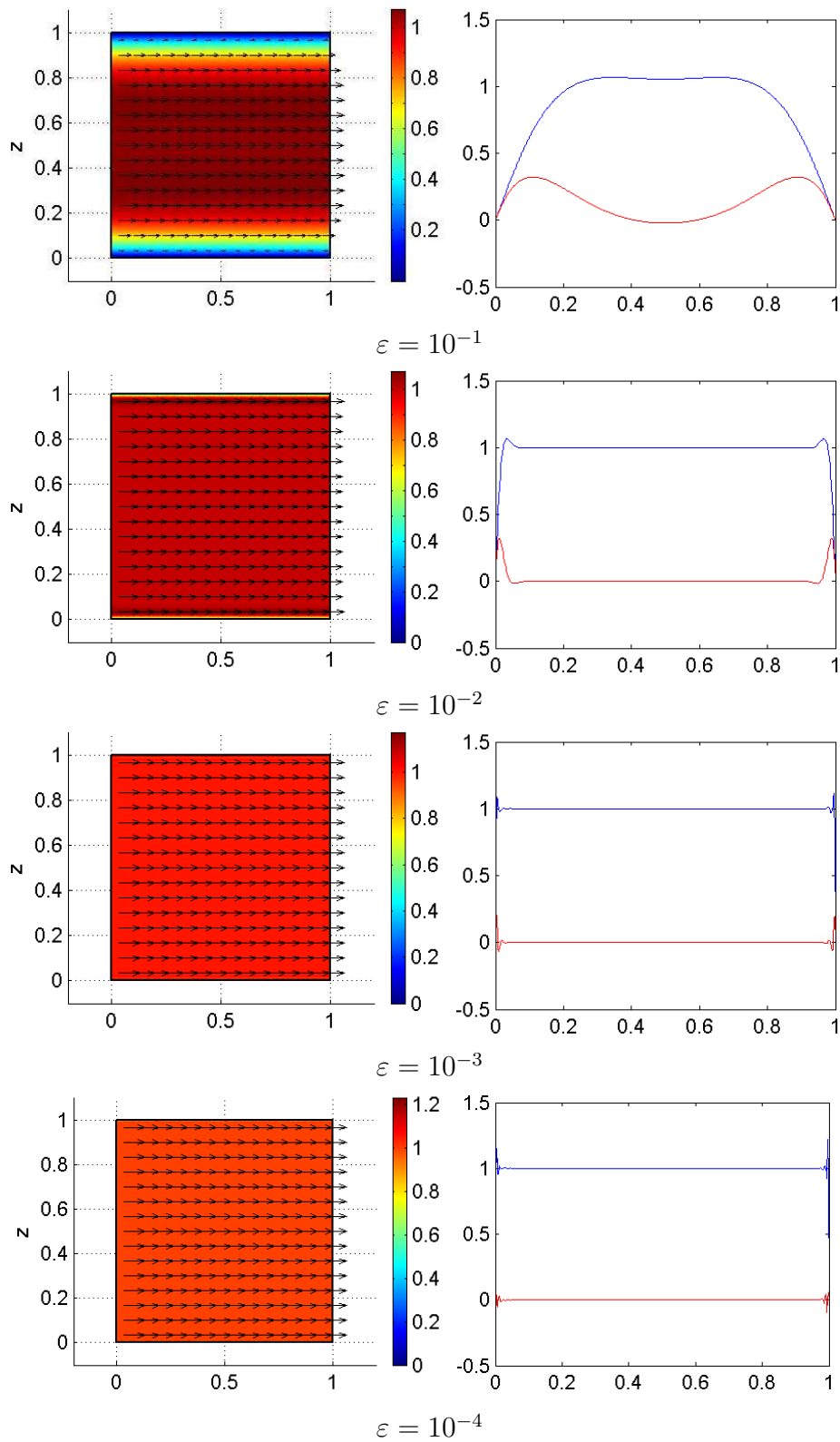


FIG. 7 – Représentations de $\|u\|$ et du champ de vecteur (u_1, u_3) à gauche, et représentations de u_1 et u_2 en fonction de la hauteur à droite.

On observe que la taille de la couche limite est de l'ordre de ε et les représentations de u_1 et u_2 sont en parfait accord avec les expressions algébriques déterminées.

On s'est alors intéressé à l'équation complète avec la dépendance temporelle, mais le solveur de Femlab n'est pas apparu très performant, nous n'avons pas obtenu de résultats pertinents.

Pour illustrer la forte influence de la rugosité du domaine sur les couches limites, on a considéré un domaine avec un bord lisse et un bord variable.

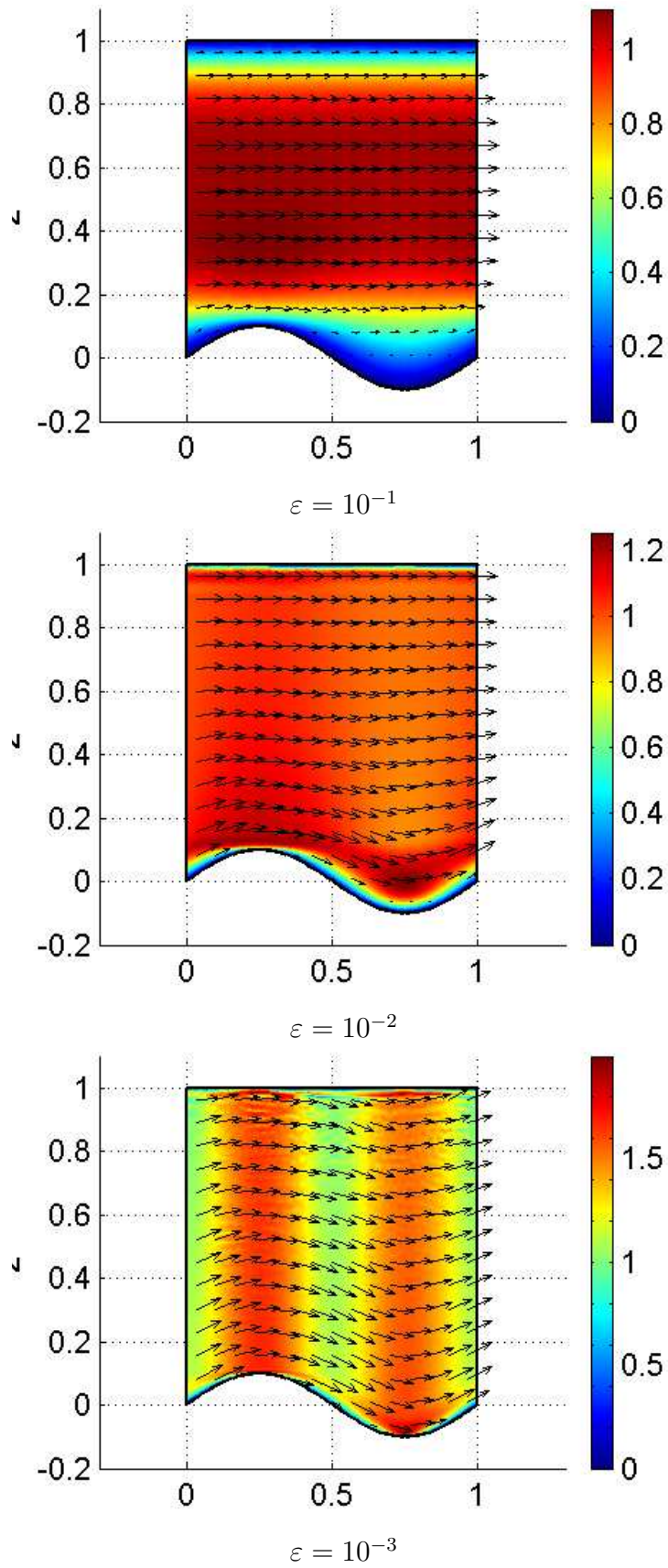


FIG. 8 – Représentations de $\|u\|$ et du champ de vecteur (u_1, u_3) avec un fond variable.

Conclusion

On s'est intéressé ici à différents aspects des phénomènes de couches limites. Leur étude est une des étapes nécessaires à la compréhension de la dynamo terrestre. Plusieurs équipes de recherche étudient la dynamique dans le noyau terrestre. Les projets expérimentaux se multiplient et les calculs numériques progressent. Ils commencent à donner une idée assez précise des mouvements qui animent le noyau fluide de la Terre. Cependant, personne n'est encore parvenu à créer un effet dynamo dans une expérience de laboratoire reproduisant la géométrie de la Terre. Il reste donc encore beaucoup de chemin à parcourir avant de percer le mystère de la dynamo terrestre et de savoir pourquoi une boussole indique le Nord.

Ce stage m'a permis d'approfondir ma double formation en Mathématiques et en Physique et m'a montré l'étroite collaboration qui est parfois nécessaire entre mathématiciens et physiciens, pour espérer éclaircir les mystères de notre monde.

Remerciements

Je voudrais remercier Emmanuel Grenier de m'avoir proposé ce projet, Stéphane Descombes pour ses conseils et ses encouragements, David Gérard-Varet pour avoir su organiser un stage très enrichissant, ses explications nombreuses, sa patience et ses conseils pour l'utilisation de Femlab, mais aussi toute l'équipe de recherche et les secrétaires de l'U.M.P.A. pour leur accueil.

Références

- [1] DESJARDINS, B., DORMY, E. et GRENIER, E. - Stability of mixed Ekman-Hartmann boundary layers. *Nonlinearity* 12, 2 (1999), 181-199.
- [2] DORMY, E. - Modélisation numérique de la dynamo terrestre. Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris, 1997.
- [3] GÉRARD-VARET, D. - Etude mathématique et numérique des couches limites en mécanique des fluides. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 2003.
- [4] GÉRARD-VARET, D. - Highly rotating fluids in rough domains. À paraître dans *J. Math. Pures Appl.*
- [5] TEMAM, R. - *Navier-Stokes Equation*. North-Holland, 1985.
- [6] GREENSPAN, H. - *The Theory of Rotating Fluids*. Breukelen Press, 1968.
- [7] GRENIER, E. et MASMOUDI, N. - Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data. *Comm. Partial Differential Equations* 22, 5-6 (1997), 953-975.