

# AUTOUR DES PROBLÈMES DE COUCHES LIMITES

*Stage encadré par Emmanuel Grenier,  
Stéphane Descombes et David Gérard-Varet*

Sébastien Giraud  
juin-juillet 2004

## **1 Les équations du problème**

*Équation du mouvement, Navier-Stokes*

*Cas d'un fluide en rotation*

*Cas d'un fluide conducteur soumis à un champ magnétique*

## **2 Dérivation des couches limites d'Ekman**

*Développement asymptotique formel*

*Profil de vitesse dans la couche limite*

*Convergence et généralisation*

## **3 Modélisation numérique avec Matlab et Femlab**

*Un premier exemple simple : l'équation de Stokes*

*La couche limite d'Ekman*

# 1 Les équations du problème

fluide homogène, incompressible, de masse volumique  $\rho$

$\vec{u}(x, y, z, t)$  champ de vitesse

**Incompressibilité :**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

**Équation de Navier-Stokes :**

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}$$

$\vec{f}$  : forces volumiques

$\nu$  : viscosité cinématique, noyau liquide :  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

**Fluide en rotation d'axe  $\vec{e} = (0, 0, 1)^t$  :**

- inertie centrifuge :  $-\rho \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\Omega^2 s^2)$

→ modification du gradient de pression

- accélération de Coriolis :  $-2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -2\rho \Omega \vec{e} \wedge \vec{u}$

$$\begin{cases} \varepsilon (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \nabla p - E \Delta u + e \times u = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

$\varepsilon = \frac{UL^{-1}}{\Omega}$  : nombre de Rossby  $\sim 10^{-7}$

$E = \frac{\nu}{\Omega L^2}$  : nombre d'Ekman  $\sim \varepsilon^2 \sim 10^{-15}$

Viscosité anisotrope :

$$\begin{cases} \varepsilon (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \nabla p - E_H \Delta_{x,y} u - E_V \partial_z^2 u + e \times u = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

$$E_H \sim \varepsilon$$

$$E_V \sim \varepsilon^2$$

$$\Delta_{x,y} = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

**Fluide conducteur soumis à un champ  $\vec{B}$  :**

densité de courant  $\vec{j} \rightarrow$  force de Laplace  $\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B}$

loi d'Ohm :  $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$

champ magnétique statique imposé  $\vec{B} = B\vec{e}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \rho^{-1} \vec{\nabla} p - \nu \Delta \vec{u} - \rho^{-1} B \vec{j} \wedge \vec{e} = 0 \\ \vec{j} = \sigma (-\vec{\nabla} \varphi + B \vec{u} \wedge \vec{e}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

dynamo terrestre :

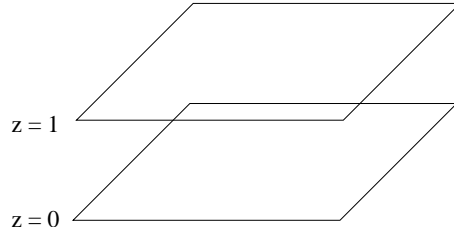
couplage entre rotation et action du champ du magnétique

## 2 Dérivation des couches limites d'Ekman

$$E_H = \varepsilon \quad E_V = \varepsilon^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \Delta_{x,y} u - \varepsilon \partial_z^2 u + \frac{e \times u}{\varepsilon} = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot u_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$$



**Développement asymptotique formel :**

$$u_{app}^\varepsilon(t, x, y, z) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i U^i \left( t, x, y, z, \frac{z}{\varepsilon}, \frac{1-z}{\varepsilon} \right)$$

$$U^i(t, x, y, z, \theta, \lambda) = \underline{u}^i(t, x, y, z) + \underline{u}^i(t, x, y, \theta) + \bar{u}^i(t, x, y, \lambda)$$

$$\theta = z/\varepsilon \quad \lambda = (1-z)/\varepsilon$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \underline{u}^i(t, x, y, \theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{u}^i(t, x, y, \lambda) = 0$$

$$\underline{u}^i(t, x, y, z=0) + \underline{u}^i(t, x, y, \theta=0) = 0$$

$$\underline{u}^i(t, x, y, z=1) + \bar{u}^i(t, x, y, \lambda=0) = 0$$

$$p_{app}^\varepsilon(t, x, y, z) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i P^i \left( t, x, y, z, \frac{z}{\varepsilon}, \frac{1-z}{\varepsilon} \right)$$

$$P^i(t, x, y, z, \theta, \lambda) = \underline{p}^i(t, x, y, z) + \underline{p}^i \left( t, x, y, \frac{z}{\varepsilon} \right) + \bar{p}^i \left( t, x, y, \frac{1-z}{\varepsilon} \right)$$

## Identification des termes :

$$e \times \underline{u}^0 + \nabla \underline{p}^0 = 0$$

$$\rightarrow \underline{p}^0 = 0$$

$$\underline{u}_3^0 = 0 \rightarrow u_3^0 = 0$$

$$e \times u^0 + \nabla p^0 = 0$$

$$\rightarrow u^0 = \nabla^\perp p^0 \quad \nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x, 0)$$

$$u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0(t, x, y) \\ u_2^0(t, x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Couche limite :

$$\begin{aligned} \partial_\theta^2 \underline{u}_1^0 + \underline{u}_2^0 &= 0 \\ \partial_\theta^2 \underline{u}_2^0 - \underline{u}_1^0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{u}_1^0(t, x, y, \theta = 0) = -\underline{u}_1^0(t, x, y), \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \underline{u}_1^0(t, x, y, \theta) = 0$$

$$\underline{u}_2^0(t, x, y, \theta = 0) = -\underline{u}_2^0(t, x, y), \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \underline{u}_2^0(t, x, y, \theta) = 0$$

$$\begin{cases} \underline{u}_1^0(t, x, y, \theta) = -e^{-\frac{\theta}{\sqrt{2}}} \left( u_1^0(t, x, y) \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) + u_2^0(t, x, y) \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \right) \\ \underline{u}_2^0(t, x, y, \theta) = -e^{-\frac{\theta}{\sqrt{2}}} \left( u_2^0(t, x, y) \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) - u_1^0(t, x, y) \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \right) \end{cases}$$

## Flux interne :

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 - \Delta_{x,y} u^0 + \sqrt{2} u^0 + \nabla q = 0 \\ u^0 = \nabla^\perp p^0 \end{cases}$$

## Convergence :

$u^\varepsilon$  : solution régulière du système

$u_{app}^\varepsilon$  : solution approchée

$$\begin{cases} \partial_t u_{app}^\varepsilon + u_{app}^\varepsilon \cdot \nabla u_{app}^\varepsilon + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \Delta_{x,y} u_{app}^\varepsilon - \varepsilon \partial_z^2 u_{app}^\varepsilon + \frac{e \times u_{app}^\varepsilon}{\varepsilon} = R_1^\varepsilon \\ \nabla \cdot u_{app}^\varepsilon = R_2^\varepsilon \\ u_{app}^\varepsilon = R_3^\varepsilon \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

→ estimation de  $\frac{1}{2} \|(u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$

## Généralisation :

- domaine rugueux - David Gérard-Varet
- sphères en rotation différentielle - Emmanuel Dormy

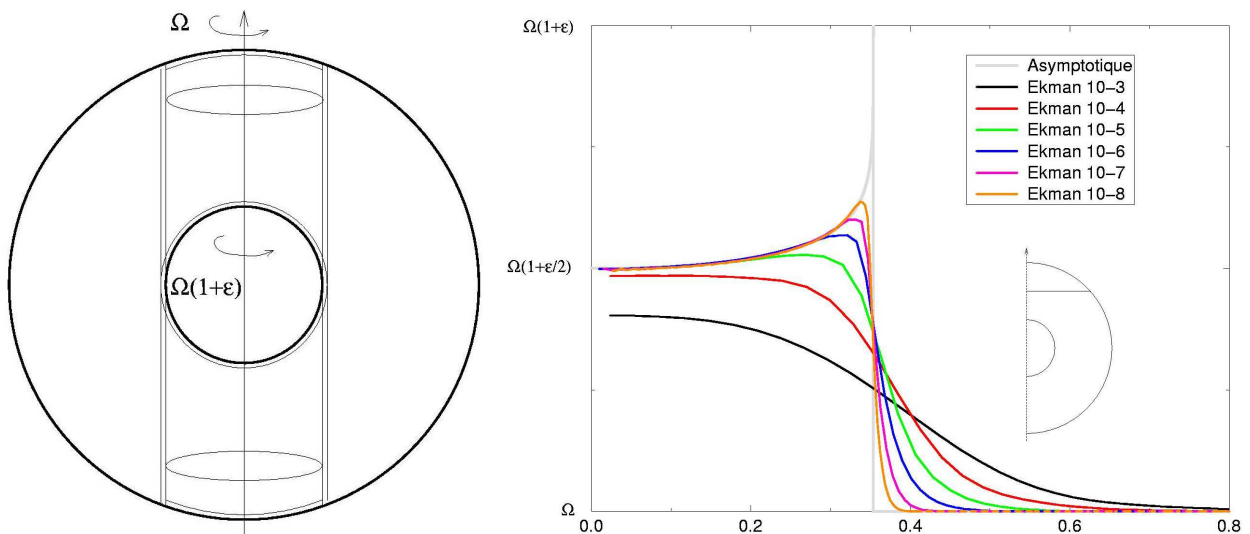


FIG. 1 – Sphères en rotation différentielle.

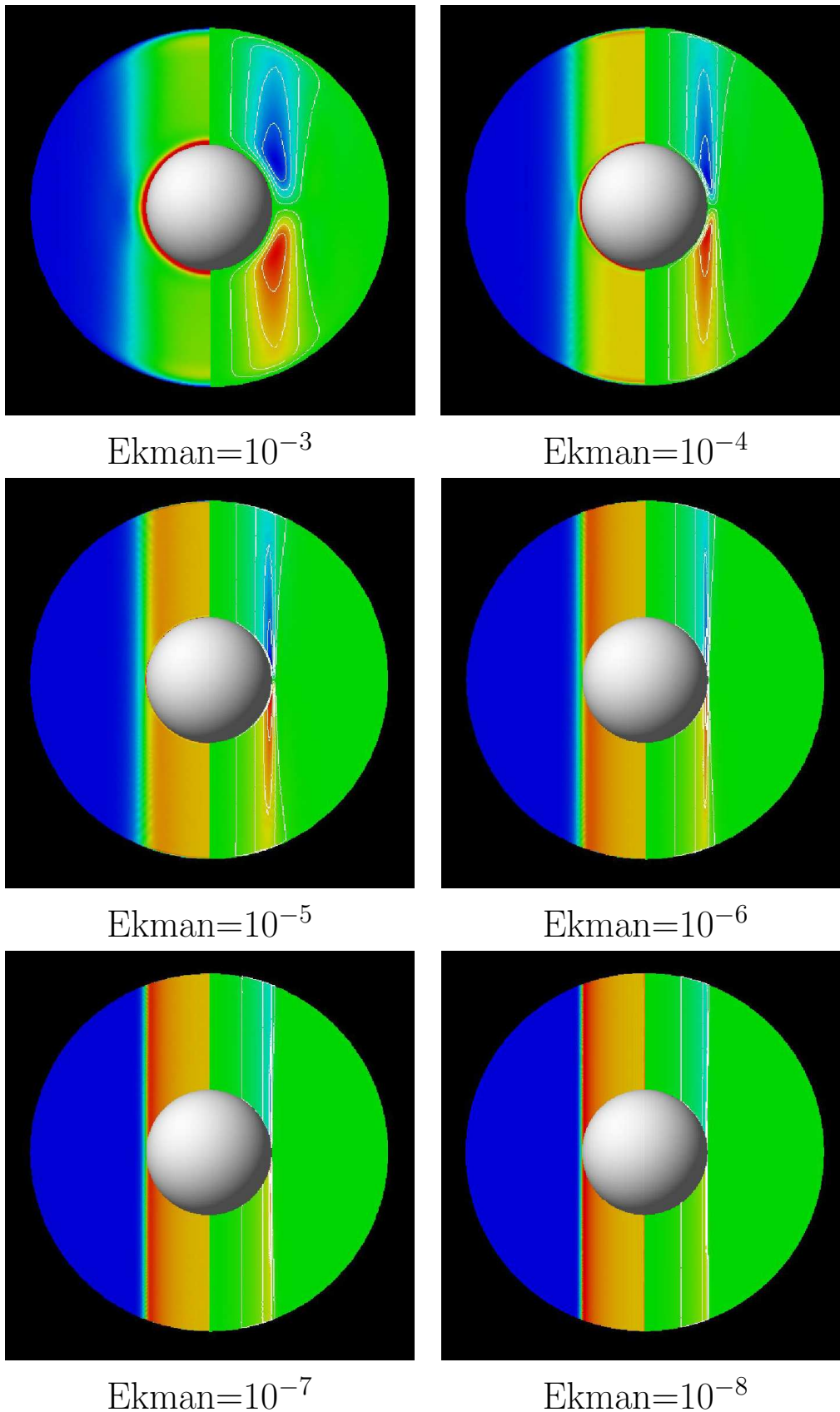


FIG. 2 – Vitesse angulaire (à gauche) et lignes de courant (à droite) dans un plan méridien pour différents nombres d’Ekman.

### 3 Modélisation numérique

#### Equation de Stokes 2D :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad p = p(x, y) \quad \text{sur } \Omega = [a, b] \times [c, d]$$

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad v(x, y) = v_0(x, y) \quad \text{si } (x, y) \in \partial\Omega$$

→ Méthode de différences finies

*Écoulement de Poiseuille*  $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$

$$\begin{array}{ccc} u_0(x, y) = Ky(1-y) & & u_0(x, y) = Ky(1-y) \\ v_0(x, y) = 0 & \Rightarrow \boxed{\phantom{\text{Diagram}}} \Rightarrow & v_0(x, y) = 0 \\ & & u_0(x, y) = 0, v_0(x, y) = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = Ky(1-y) \\ v(x, y) = 0 \\ p(x, y) = -2\mu Kx + p_0 \end{cases}$$



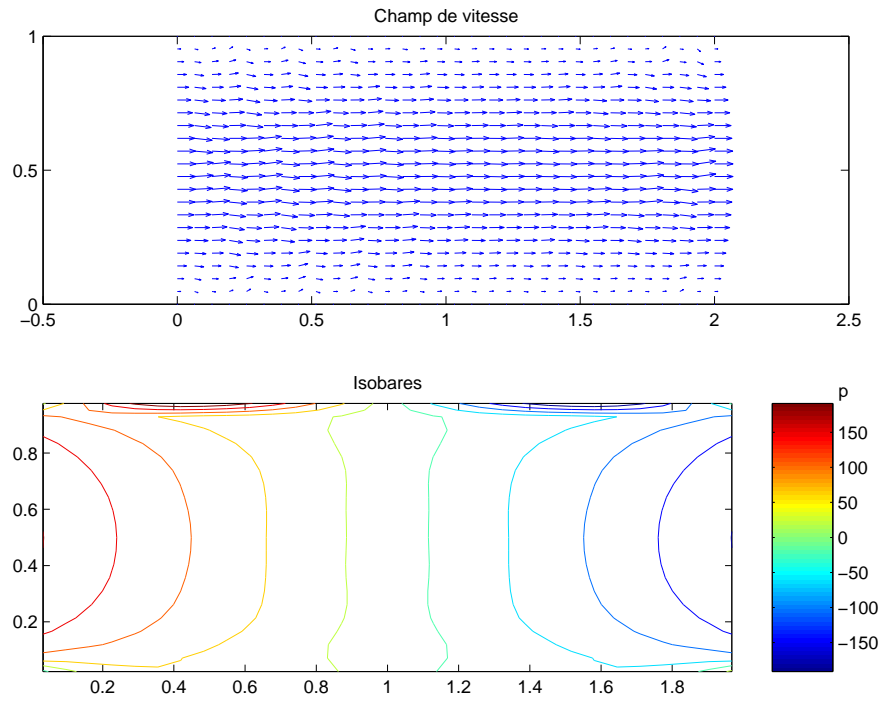


FIG. 3 – Écoulement de Poiseuille.  $K = 1$ ,  $\mu = 100$ ,  $N_x = 30$  et  $N_y = 20$

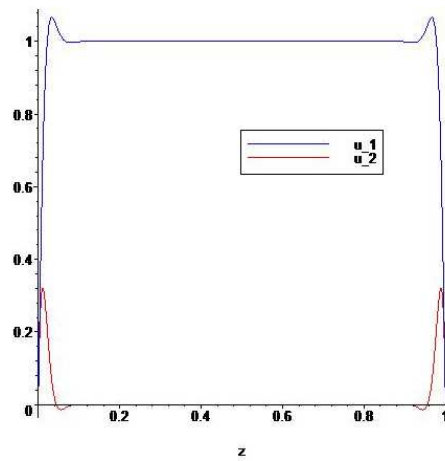


FIG. 4 – Représentation de la vitesse en fonction de la hauteur.

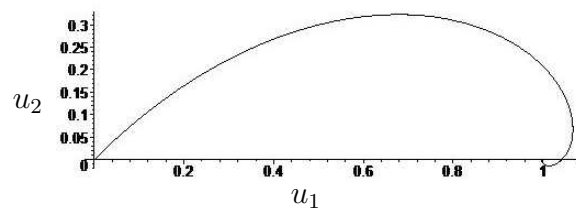
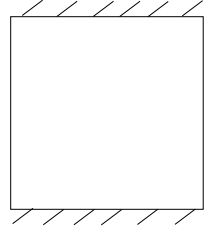


FIG. 5 – Représentation paramétrique de  $(u_1, u_2)$  - Spirale d'Ekman.

## Couche limite d'Ekman :



$$\Rightarrow u^{lim} = \begin{pmatrix} u_1^{lim} \\ u_2^{lim} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \partial_x^2 u - \varepsilon \partial_z^2 u + \frac{e \times u}{\varepsilon} = \frac{e \times u^{lim}}{\varepsilon} \quad \text{dans } [0, 1] \times [0, 1] \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, z = 0) = u(x, z = 1) = 0 \quad \forall x \in [0, 1] \\ u(x = 0, z) = u(x = 1, z) \quad \forall z \in [0, 1] \\ p(x = 0, z) = p(x = 1, z) \quad \forall z \in [0, 1] \end{array} \right.$$

$$u = u^{lim} + u^{cl}(z) \quad \text{avec} \quad u^{cl}(z) = \begin{pmatrix} u_1^{cl}(z) \\ u_2^{cl}(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} u_1^{cl}(z) &= f(z) + f(1 - z) \\ u_2^{cl}(z) &= -\varepsilon^2 (f''(z) + f''(1 - z)) \end{aligned}$$

avec

$$f(z) = e^{\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon}}} \left( \lambda^\varepsilon \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + \mu^\varepsilon \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) \right)$$

$$\lambda^\varepsilon = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_2^{lim} + e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_1^{lim} + u_1^{lim}}{e^{\frac{2}{\sqrt{2\varepsilon}}} + 2e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + 1}$$

$$\mu^\varepsilon = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_2^{lim} - e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) u_1^{lim} + u_2^{lim}}{e^{\frac{2}{\sqrt{2\varepsilon}}} + 2e^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + 1}$$

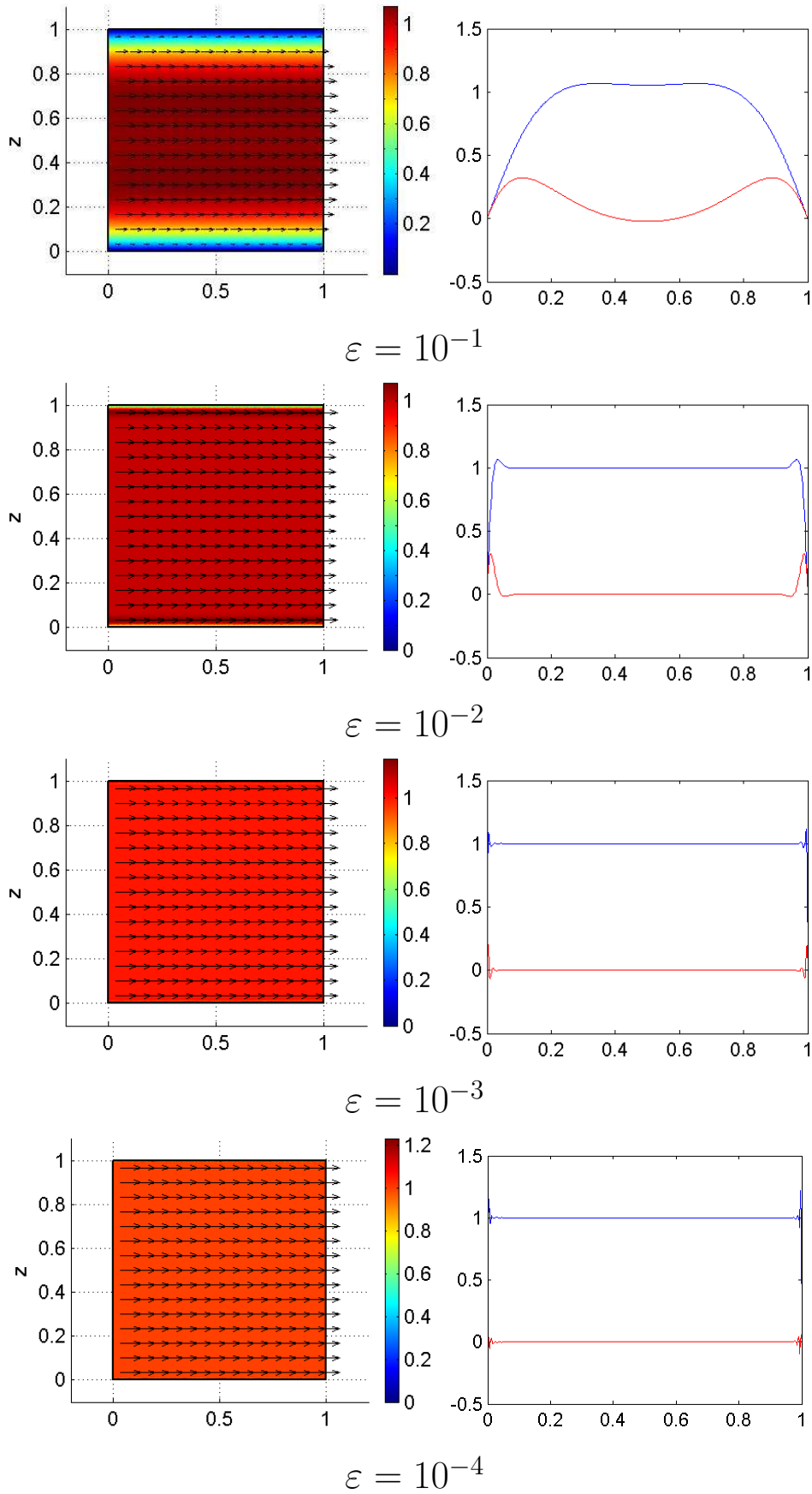
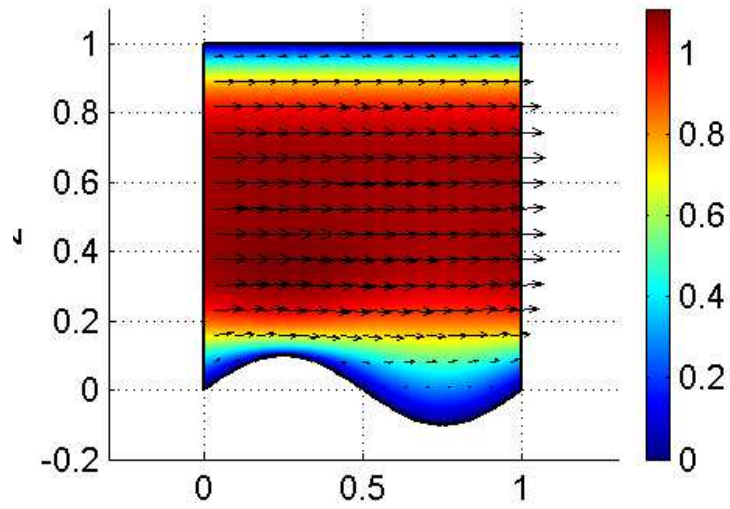
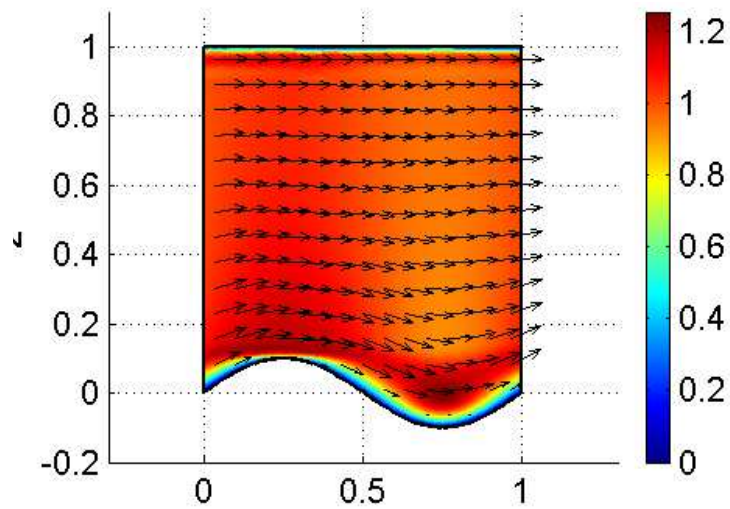


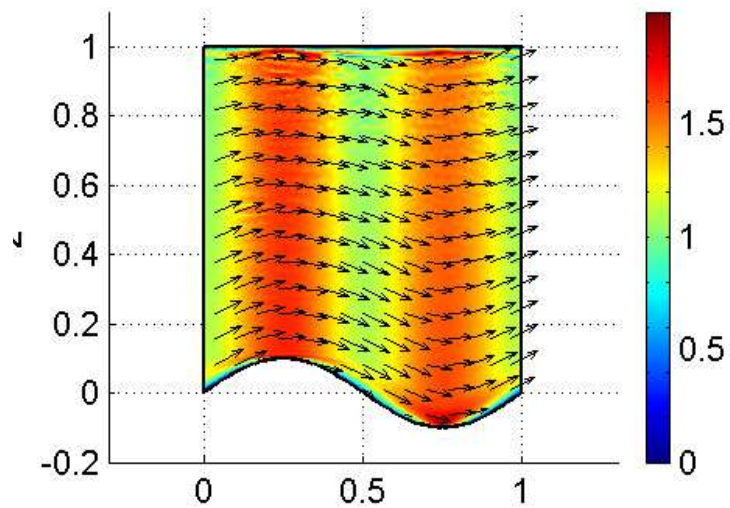
FIG. 6 – Représentations de  $\|u\|$  et du champ de vecteur  $(u_1, u_3)$  à gauche, et représentations de  $u_1$  et  $u_2$  en fonction de la hauteur à droite.



$$\varepsilon = 10^{-1}$$



$$\varepsilon = 10^{-2}$$



$$\varepsilon = 10^{-3}$$

FIG. 7 – Représentations de  $\|u\|$  et du champ de vecteur  $(u_1, u_3)$  avec un fond variable.