

# GAZ DE FERMIONS ULTRAFROIDS FORTEMENT POLARISÉS

Sébastien Giraud

Encadré par Roland Combescot

et Xavier Leyronas



15 mai 2007

- 1 Les gaz de fermions ultrafroids
  - Gaz de fermions en interaction
  - Réalisations expérimentales, résonances de Feshbach
  - Le Hamiltonien du système
- 2 Développements théoriques
  - Un calcul variationnel
  - Développement diagrammatique
  - Self-énergie, potentiel chimique, masse effective
  - Approximation de la matrice  $T$
- 3 Résolution numérique et résultats
  - Premiers résultats
  - Une généralisation de l'approximation de la matrice  $T$
  - Résolution numérique

## Gaz de fermions en interaction

Pour des fermions sans interaction, l'état fondamental du système est déterminé par le principe de Pauli : les fermions peuplent tous les états dont le vecteur d'onde est inférieur au vecteur d'onde de Fermi  $k_F$  avec exactement un atome par niveau et par état de spin (ou par état hyperfin).  $\rightarrow$  *mer de Fermi*

Les interactions permettent aux fermions de s'apparier : les paires ainsi formées sont bosoniques et peuvent subir une condensation de Bose-Einstein pour une température inférieure à une température critique  $T_c$ .

# Gaz de fermions en interaction

Pour des fermions sans interaction, l'état fondamental du système est déterminé par le principe de Pauli : les fermions peuplent tous les états dont le vecteur d'onde est inférieur au vecteur d'onde de Fermi  $k_F$  avec exactement un atome par niveau et par état de spin (ou par état hyperfin).  $\rightarrow$  *mer de Fermi*

Les interactions permettent aux fermions de s'apparier : les paires ainsi formées sont bosoniques et peuvent subir une condensation de Bose-Einstein pour une température inférieure à une température critique  $T_c$ .

3 régimes en fonction du signe de la longueur de diffusion  $a$  :

- ▶  $a < 0$  et faible ( $k_F|a| \lesssim 1$ ), régime BCS, formation de paires de Cooper.
- ▶  $a > 0$  et faible ( $k_F a \lesssim 1$ ), régime BEC, formation de molécules.
- ▶  $k_F|a| \gtrsim 1$ , mer de Fermi en interaction forte.

# Gaz de fermions en interaction

Pour des fermions sans interaction, l'état fondamental du système est déterminé par le principe de Pauli : les fermions peuplent tous les états dont le vecteur d'onde est inférieur au vecteur d'onde de Fermi  $k_F$  avec exactement un atome par niveau et par état de spin (ou par état hyperfin).  $\rightarrow$  *mer de Fermi*

Les interactions permettent aux fermions de s'apparier : les paires ainsi formées sont bosoniques et peuvent subir une condensation de Bose-Einstein pour une température inférieure à une température critique  $T_c$ .

3 régimes en fonction du signe de la longueur de diffusion  $a$  :

- ▶  $a < 0$  et faible ( $k_F|a| \lesssim 1$ ), régime BCS, formation de paires de Cooper.
- ▶  $a > 0$  et faible ( $k_F a \lesssim 1$ ), régime BEC, formation de molécules.
- ▶  $k_F|a| \gtrsim 1$ , mer de Fermi en interaction forte.

# Gaz de fermions en interaction

Pour des fermions sans interaction, l'état fondamental du système est déterminé par le principe de Pauli : les fermions peuplent tous les états dont le vecteur d'onde est inférieur au vecteur d'onde de Fermi  $k_F$  avec exactement un atome par niveau et par état de spin (ou par état hyperfin).  $\rightarrow$  *mer de Fermi*

Les interactions permettent aux fermions de s'apparier : les paires ainsi formées sont bosoniques et peuvent subir une condensation de Bose-Einstein pour une température inférieure à une température critique  $T_c$ .

3 régimes en fonction du signe de la longueur de diffusion  $a$  :

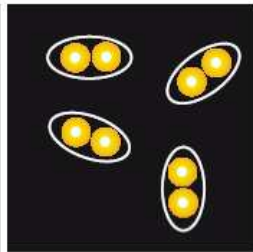
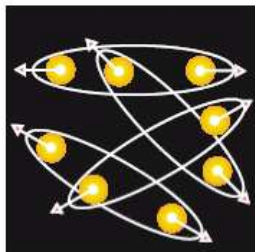
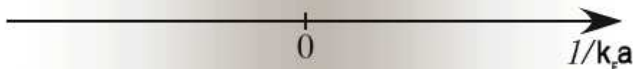
- ▶  $a < 0$  et faible ( $k_F|a| \lesssim 1$ ), régime BCS, formation de paires de Cooper.
- ▶  $a > 0$  et faible ( $k_F a \lesssim 1$ ), régime BEC, formation de molécules.
- ▶  $k_F|a| \gtrsim 1$ , mer de Fermi en interaction forte.

# Gaz de fermions en interaction

Etat BCS :  
paires de Cooper

Mer de Fermi  
en interaction  
forte

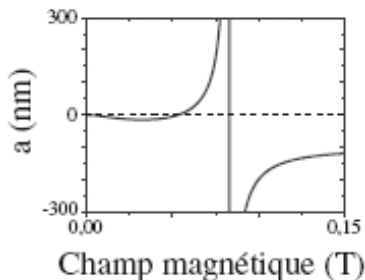
Condensat de  
Bose Einstein  
de molécules



# Réalisations expérimentales, résonances de Feshbach

Le régime quantique a été atteint en 1999 pour le  $^{40}\text{K}$  et en 2001 pour le  $^6\text{Li}$ . Des fermions de même état de spin n'interagissent pas à basse température, le refroidissement évaporatif doit être adapté : on utilise un refroidissement sympathique.

En faisant varier le champ magnétique, on peut faire varier fortement la longueur de diffusion au voisinage d'une résonance de Feshbach.





# Le Hamiltonien du système

Que se passe-t-il si les atomes appartenant à des états hyperfins différents sont en nombre inégal ?

→ le phénomène d'appariement est perturbé.

Un cas extrême : un seul atome d'une espèce notée  $\downarrow$  immergé dans une mer de Fermi formée de  $N_{\uparrow}$  atomes d'une autre espèce notée  $\uparrow$ , à température nulle.

Hamiltonien :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \sum_{i=1}^{N_{\uparrow}} \frac{p_{i\uparrow}^2}{2m_{\uparrow}} + \frac{p_{\downarrow}^2}{2m_{\downarrow}} + \sum_{i=1}^{N_{\uparrow}} V(\mathbf{r}_{i\uparrow} - \mathbf{r}_{\downarrow}) \quad (1)$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma=\uparrow, \downarrow} \varepsilon_{\sigma}(k) c_{\mathbf{k}, \sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}, \sigma} + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \uparrow}^{\dagger} c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}, \downarrow}^{\dagger} c_{\mathbf{k}', \downarrow} c_{\mathbf{k}, \uparrow} \quad (2)$$

avec  $\{c_{\mathbf{k}, \sigma}, c_{\mathbf{k}', \sigma'}^{\dagger}\} = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  et  $\varepsilon_{\sigma}(k) = k^2/2m_{\sigma}$ .

# Un calcul variationnel

On prend pour fonction d'onde test l'état d'impulsion totale  $\mathbf{p}$  :

$$|\psi\rangle = \phi_0 |\mathbf{p}\rangle_{\downarrow} |\text{FS}\rangle_{\uparrow} + \sum_{\substack{q < k_F \\ k > k_F}} \phi_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} |\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}\rangle_{\downarrow} c_{\mathbf{k}, \uparrow}^{\dagger} c_{\mathbf{q}, \uparrow} |\text{FS}\rangle_{\uparrow} \quad (3)$$

avec  $|\text{FS}\rangle_{\uparrow} = \prod_{k < k_F} c_{\mathbf{k}, \uparrow}^{\dagger} |0\rangle$  la mer de Fermi d'atomes  $\uparrow$  d'énergie

$E_{\text{FS}} = \sum_{k < k_F} \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{k})$  et  $|\mathbf{p}\rangle_{\downarrow}$  une onde plane d'impulsion  $\mathbf{p}$  pour l'atome  $\downarrow$ .

On prend un potentiel de portée nulle :

$$V(\mathbf{r}) = g_0 \delta(\mathbf{r}) \quad (4)$$

où la constante de couplage  $g_0$  est donnée par :

$$\frac{1}{g_0} = \frac{m_r}{2\pi a} - \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2m_r}{k^2}, \quad m_r = \frac{m_{\uparrow} m_{\downarrow}}{m_{\uparrow} + m_{\downarrow}} \quad (5)$$

# Un calcul variationnel

En minimisant  $\langle \hat{H} \rangle$  avec la contrainte de normalisation

$$1 = |\phi_0|^2 + \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} |\phi_{\mathbf{q}, \mathbf{k}}|^2 \quad (6)$$

on obtient l'énergie (comptée à partir de  $E_{\text{FS}}$ ) :

$$E = \varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p}) + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{q < k_F} f(E, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(E, \mathbf{p}, \mathbf{q})} &= \frac{m_r}{2\pi a} - \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2m_r}{k^2} \\ &+ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{k > k_F} \frac{1}{\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{k}) + \varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) - \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{q}) - E} \end{aligned} \quad (8)$$

# Un calcul variationnel

En minimisant  $\langle \hat{H} \rangle$  avec la contrainte de normalisation

$$1 = |\phi_0|^2 + \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} |\phi_{\mathbf{q}, \mathbf{k}}|^2 \quad (6)$$

on obtient l'énergie (comptée à partir de  $E_{\text{FS}}$ ) :

$$E = \varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p}) + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{q < k_F} f(E, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(E, \mathbf{p}, \mathbf{q})} &= \frac{m_r}{2\pi a} - \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2m_r}{k^2} \\ &+ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{k > k_F} \frac{1}{\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{k}) + \varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) - \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{q}) - E} \end{aligned} \quad (8)$$

- ▶ équation implicite pour l'énergie des quasi-particules  $\downarrow$ .
- ▶ pour  $\mathbf{p} = 0$ , borne supérieure pour le potentiel chimique  $\mu_{\downarrow}$ .

# Un calcul variationnel

En minimisant  $\langle \hat{H} \rangle$  avec la contrainte de normalisation

$$1 = |\phi_0|^2 + \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} |\phi_{\mathbf{q}, \mathbf{k}}|^2 \quad (6)$$

on obtient l'énergie (comptée à partir de  $E_{\text{FS}}$ ) :

$$E = \varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p}) + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{q < k_F} f(E, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(E, \mathbf{p}, \mathbf{q})} &= \frac{m_r}{2\pi a} - \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2m_r}{k^2} \\ &+ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{k > k_F} \frac{1}{\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{k}) + \varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) - \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{q}) - E} \end{aligned} \quad (8)$$

- ▶ équation implicite pour l'énergie des quasi-particules  $\downarrow$ .
- ▶ pour  $\mathbf{p} = 0$ , borne supérieure pour le potentiel chimique  $\mu_{\downarrow}$ .

# Fonction de Green

Fonction de Green à température nulle :

$$G_{\sigma}(\mathbf{k}; t - t') = -i \langle \Psi_0 | T c_{\mathbf{k},\sigma}(t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') | \Psi_0 \rangle \quad (9)$$

avec  $c_{\mathbf{k},\sigma}(t) = e^{i\hat{H}'t} c_{\mathbf{k},\sigma} e^{-i\hat{H}'t}$ ,  $\hat{H}' = \hat{H} - \mu_{\uparrow} \hat{N}_{\uparrow} - \mu_{\downarrow} \hat{N}_{\downarrow}$   
 $|\Psi_0\rangle$  : fondamental de  $\hat{H}$

$T$  opérateur d'ordonnancement chronologique :

$$T c_{\mathbf{k},\sigma}(t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') = \theta(t - t') c_{\mathbf{k},\sigma}(t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') - \theta(t' - t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') c_{\mathbf{k},\sigma}(t)$$

# Fonction de Green

Fonction de Green à température nulle :

$$G_{\sigma}(\mathbf{k}; t - t') = -i \langle \Psi_0 | T c_{\mathbf{k},\sigma}(t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') | \Psi_0 \rangle \quad (9)$$

avec  $c_{\mathbf{k},\sigma}(t) = e^{i\hat{H}'t} c_{\mathbf{k},\sigma} e^{-i\hat{H}'t}$ ,  $\hat{H}' = \hat{H} - \mu_{\uparrow} \hat{N}_{\uparrow} - \mu_{\downarrow} \hat{N}_{\downarrow}$   
 $|\Psi_0\rangle$  : fondamental de  $\hat{H}$

$T$  opérateur d'ordonnancement chronologique :

$$T c_{\mathbf{k},\sigma}(t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') = \theta(t - t') c_{\mathbf{k},\sigma}(t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') - \theta(t' - t) c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}(t') c_{\mathbf{k},\sigma}(t)$$

Pour le système sans interaction ( $V=0$ ) :

$$G_{0\downarrow}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{\downarrow}(k) + \mu_{\downarrow}} \quad (10)$$

$$G_{0\uparrow}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{\uparrow}(k) + \mu_{\uparrow} + i0^+ \text{sign}(k - k_F)} \quad (11)$$

# Fonction de Green

On utilise la limite pour  $T \rightarrow 0$  du formalisme à température finie, la fonction de Green  $G_\sigma(\mathbf{k}, \omega)$  est alors définie sur l'axe imaginaire des fréquences. On obtient la fonction de Green à température nulle (définie sur l'axe réel des fréquences) en prenant le prolongement analytique au plan complexe des fréquences.



# Fonction de Green

On utilise la limite pour  $T \rightarrow 0$  du formalisme à température finie, la fonction de Green  $G_\sigma(\mathbf{k}, \omega)$  est alors définie sur l'axe imaginaire des fréquences. On obtient la fonction de Green à température nulle (définie sur l'axe réel des fréquences) en prenant le prolongement analytique au plan complexe des fréquences.

Densité spectrale :

$$A_\sigma(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_\sigma(\mathbf{k}, \omega + i0^+) \quad (12)$$

→ donne en particulier l'énergie et la durée de vie des quasiparticules.

# Fonction de Green

On utilise la limite pour  $T \rightarrow 0$  du formalisme à température finie, la fonction de Green  $G_\sigma(\mathbf{k}, \omega)$  est alors définie sur l'axe imaginaire des fréquences. On obtient la fonction de Green à température nulle (définie sur l'axe réel des fréquences) en prenant le prolongement analytique au plan complexe des fréquences.

Densité spectrale :

$$A_\sigma(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_\sigma(\mathbf{k}, \omega + i0^+) \quad (12)$$

→ donne en particulier l'énergie et la durée de vie des quasiparticules.

L'unique atome  $\downarrow$  ne modifie pas la mer de Fermi d'atomes  $\uparrow$  :

$$G_\uparrow(k, i\omega) = G_{0\uparrow}(k, i\omega) = \frac{1}{i\omega - \varepsilon_\uparrow(k) + \mu_\uparrow} \quad (13)$$

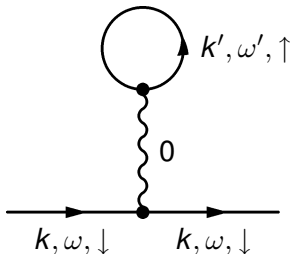
avec  $\mu_\uparrow = k_F^2/2m_\uparrow$ .

# Développement diagrammatique

La théorie des diagrammes de Feynman permet de développer la fonction de Green  $G_{\downarrow}(k, i\omega)$  en une série faisant intervenir des puissances de l'interaction  $V$ .

→ permet de visualiser les interactions entre les particules.

A l'ordre 1 :



$$G_{\downarrow}^{(1)}(\mathbf{k}, i\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega' G_{0\downarrow}(\mathbf{k}, i\omega) V_{q=0} G_{0\uparrow}(\mathbf{k}', \omega') G_{0\downarrow}(\mathbf{k}, i\omega)$$

# Self-énergie, potentiel chimique, masse effective

On appelle self-énergie la somme des diagrammes qui ne peuvent être coupés en deux si on coupe une et une seule ligne de fermions. La fonction de Green se décompose sous la forme :

$$G_{\downarrow}(\mathbf{k}, i\omega) = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

On obtient :

$$G_{\downarrow}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{\downarrow}(k) + \mu_{\downarrow} - \Sigma(k, \omega)} \quad (14)$$

# Self-énergie, potentiel chimique, masse effective

On appelle self-énergie la somme des diagrammes qui ne peuvent être coupés en deux si on coupe une et une seule ligne de fermions. La fonction de Green se décompose sous la forme :

$$G_{\downarrow}(\mathbf{k}, i\omega) = \text{---} \rightarrow \text{---} + \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

(Diagram description: A series of diagrams representing the expansion of the Green's function. The first term is a simple horizontal arrow. The second term is a horizontal arrow with a circle containing the Greek letter Σ in the middle. The third term is a horizontal arrow with two such circles in series. The sequence continues with more terms and an ellipsis at the end.)

On obtient :

$$G_{\downarrow}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{\downarrow}(k) + \mu_{\downarrow} - \Sigma(k, \omega)} \quad (14)$$

Les pôles de  $G_{\downarrow}(k, \omega)$  donnent le spectre des quasiparticules :

$$\omega - \varepsilon_{\downarrow}(k) + \mu_{\downarrow} - \Sigma(k, \omega) = 0 \quad (15)$$

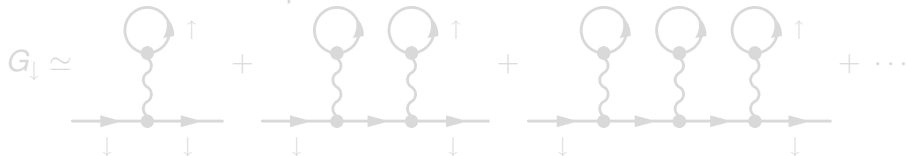
On déduit :

$$\boxed{\mu_{\downarrow} = \Sigma(0, 0)} \quad \frac{m^*}{m_{\downarrow}} = \frac{1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial \omega}}{1 + 2m_{\downarrow} \frac{\partial \Sigma}{\partial k^2}} \quad (16)$$

# Approximation de la matrice $T$

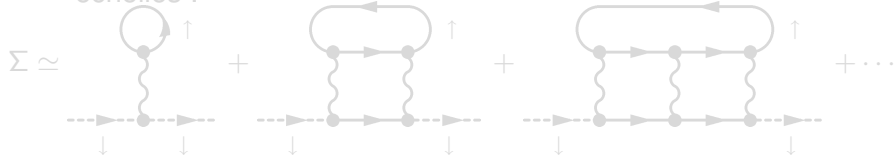
## Quels diagrammes choisir ?

- ▶ Si on utilise uniquement le terme de Hartree :



→ insuffisant pour décrire les effets dus à la présence de la mer de Fermi d'atomes  $\uparrow$ .

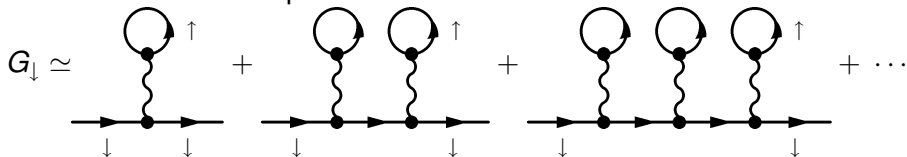
- ▶ On choisit pour  $\Sigma$  tous les diagrammes faisant intervenir des processus d'interaction à deux corps - approximation des échelles :



# Approximation de la matrice $T$

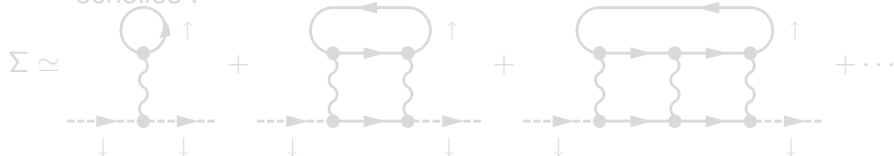
## Quels diagrammes choisir ?

- ▶ Si on utilise uniquement le terme de Hartree :



→ insuffisant pour décrire les effets dus à la présence de la mer de Fermi d'atomes  $\uparrow$ .

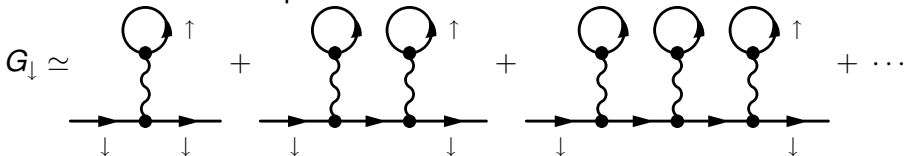
- ▶ On choisit pour  $\Sigma$  tous les diagrammes faisant intervenir des processus d'interaction à deux corps - approximation des échelles :



# Approximation de la matrice $T$

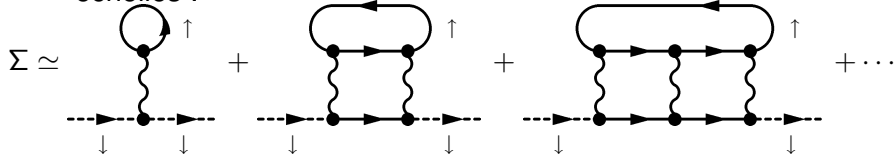
## Quels diagrammes choisir ?

- ▶ Si on utilise uniquement le terme de Hartree :



→ insuffisant pour décrire les effets dus à la présence de la mer de Fermi d'atomes  $\uparrow$ .

- ▶ On choisit pour  $\Sigma$  tous les diagrammes faisant intervenir des processus d'interaction à deux corps - approximation des échelles :





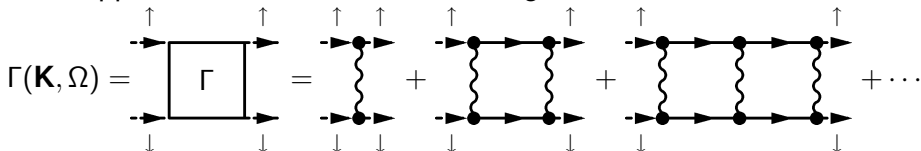
# Le vertex $\Gamma$

On appelle vertex  $\Gamma$  la somme des diagrammes en échelle :

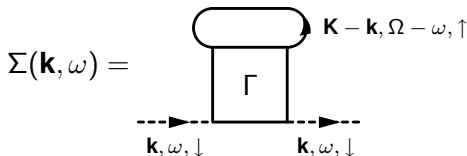
$$\Gamma(\mathbf{K}, \Omega) = \begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{---} \rightarrow \boxed{\Gamma} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \boxed{\Gamma} \rightarrow \text{---} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \bullet \rightarrow \text{---} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \end{array} + \dots$$

# Le vertex $\Gamma$

On appelle vertex  $\Gamma$  la somme des diagrammes en échelle :


$$\Gamma(\mathbf{K}, \Omega) = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \rightarrow \square \Gamma \leftarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \square \Gamma \rightarrow \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} + \dots$$

On obtient une équation pour  $\Sigma$  en fonction de  $\Gamma$  :


$$\Sigma(\mathbf{k}, \omega) = \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \end{array}$$

$$\Sigma(k, \omega) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\Omega \Gamma(\mathbf{K}, \Omega) G_{0\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k}, \Omega - \omega) \quad (17)$$

 cette équation n'est valable que pour  $\omega$  sur l'axe imaginaire

Rappel :

$$G_{0\uparrow}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{\uparrow}(k) + \mu_{\uparrow}}$$

# Le vertex $\Gamma$

En réalisant l'intégration sur les fréquences, on obtient :

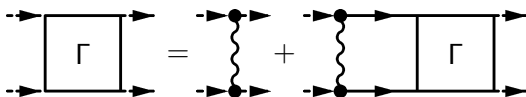
$$\Sigma(k, \omega) = \int \frac{d^3 \mathbf{K}}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{K}, \omega + \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k}) - \mu_{\uparrow}) \theta(\mu_{\uparrow} - \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k})) \quad (18)$$

# Le vertex $\Gamma$

En réalisant l'intégration sur les fréquences, on obtient :

$$\Sigma(k, \omega) = \int \frac{d^3 \mathbf{K}}{(2\pi)^3} \Gamma(K, \omega + \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k}) - \mu_{\uparrow}) \theta(\mu_{\uparrow} - \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k})) \quad (18)$$

On peut écrire :



En prenant un potentiel de portée nulle

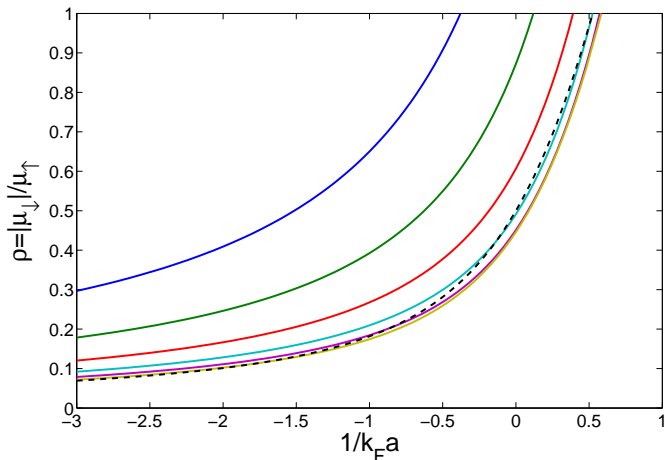
$$V(\mathbf{r}) = g_0 \delta(\mathbf{r}) \quad \frac{1}{g_0} = \frac{m_r}{2\pi a} - \int_{|\mathbf{k}| < k_c} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2m_r}{k^2} \quad (19)$$

on obtient :

$$\Gamma^{-1}(K, \Omega) = \frac{m_r}{2\pi a} - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{2m_r}{k^2} + G_{0\downarrow}(k, \Omega + \mu_{\uparrow} - \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k})) \times \theta(\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k}) - \mu_{\uparrow}) \right] \quad (20)$$

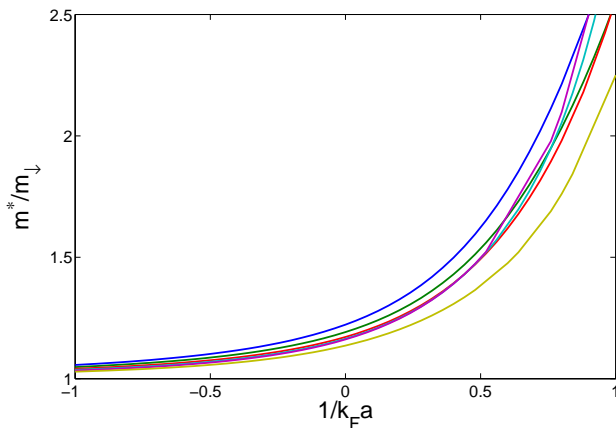
## Premiers résultats

→ équation implicite pour  $\mu_{\downarrow}$ . A l'unitarité :  $\mu_{\downarrow} = -0.60664 \mu_{\uparrow}$ .



Potentiel chimique de l'atome  $\downarrow$  pour différents rapports de masse  
 $r = m_{\downarrow}/m_{\uparrow}$ ,  $r = 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 10$ .

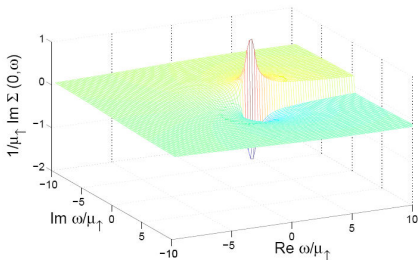
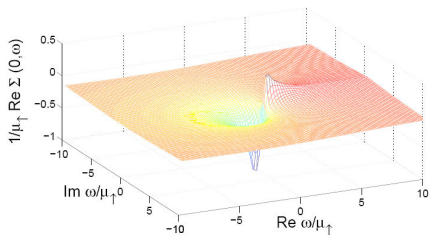
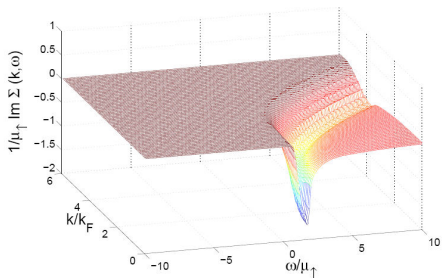
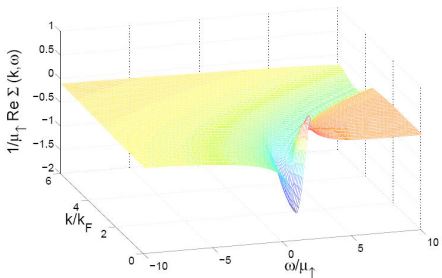
## Premiers résultats



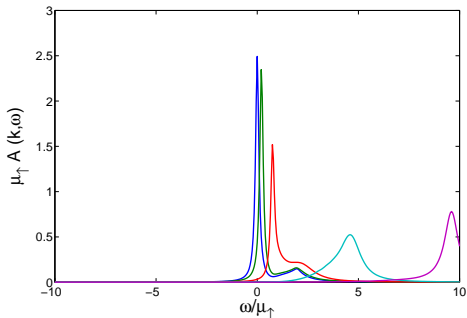
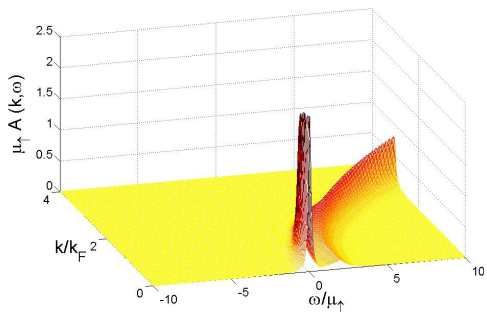
Masse effective des quasiparticules  $\downarrow$  pour différents rapports de masse  $r = m_{\downarrow}/m_{\uparrow}$ ,  $r = 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 10$ .

A l'unitarité :  $m^* = 1.17 m_{\downarrow}$ .

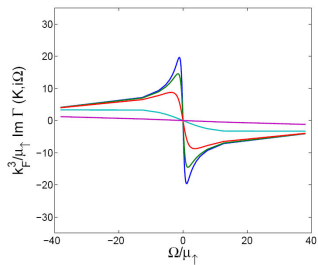
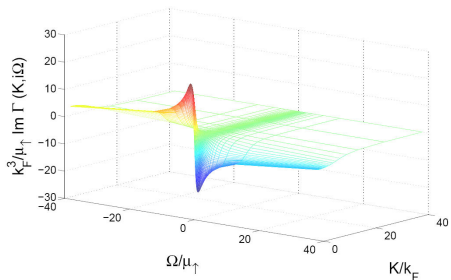
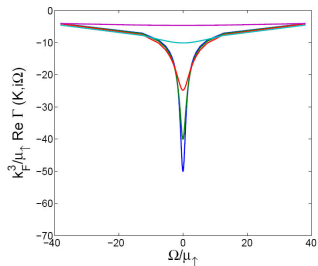
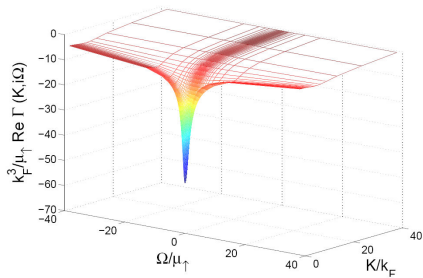
## Self-énergie



# Densité spectrale



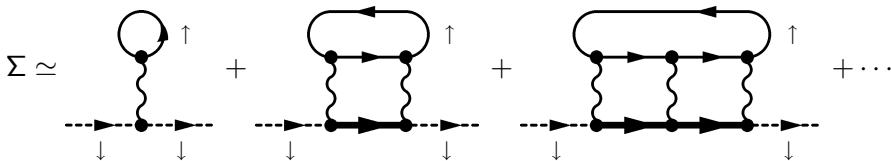


Vertex  $\Gamma$ 

# Généralisation de l'approximation de la matrice $T$

Pour tenir compte de plus de processus d'interaction, on utilise la

fonction de Green complète  $G_{\downarrow}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{\downarrow}(k) + \mu_{\downarrow} - \Sigma(k, \omega)}$  :



$$\Gamma^{-1}(K, \Omega) = \frac{m_r}{2\pi a} - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{2m_r}{k^2} + G_{\downarrow}(k, \Omega + \mu_{\uparrow} - \varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k})) \times \theta(\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k}) - \mu_{\uparrow}) \right] \quad (21)$$

$$\Sigma(k, \omega) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{d^3 \mathbf{K}}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\Omega \Gamma(K, \Omega) G_{0\uparrow}(\mathbf{K} - \mathbf{k}, \Omega - \omega) \quad (22)$$

→ équations couplées via la fonction de Green

→ détermination de  $\Gamma(K, \Omega)$ ,  $K$  réel,  $\Omega$  imaginaire pure, sur une grille. 21

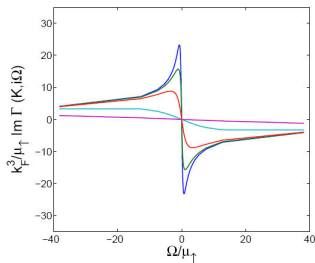
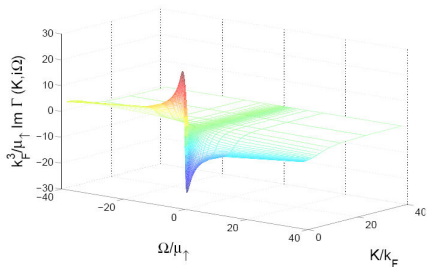
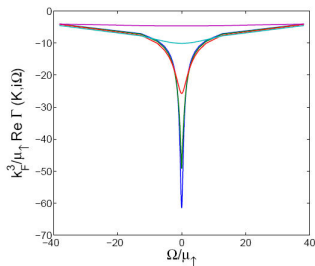
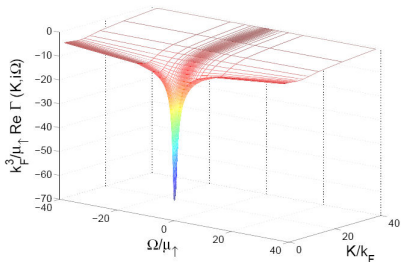
# Résolution numérique

Quelques étapes de la construction numérique :

- ▶ calcul du prolongement analytique de  $\Sigma$  pour des fréquences de partie réelles négatives.
- ▶ on procède par itérations successives.
- ▶ interpolation en utilisant des splines cubiques.
- ▶ intégration numérique en traitant les singularités.

# Résolution numérique

→ A l'unitarité :  $\mu_{\downarrow} = -0.67725 \mu_{\uparrow}$ .



# Conclusion

- ▶ Accord entre les différentes approches : méthode variationnelle, approximation de la matrice  $T$  et sa généralisation.
- ▶ Validation de l'approximation de la matrice  $T$  ?
- ▶ Améliorations : pas de prolongement analytique de  $\Sigma$  pour  $\text{Re } \omega > 0$ , pas de densité spectrale, tenir compte de processus d'interaction à 3 ou 4 corps pour justifier la convergence.