Approximations Diophantiennes

S. Giraud

La théorie des approximations diophantiennes concerne l'approximation des réels par des rationnels. On se limitera ici à l'approximation d'un seul réel, bien que de nombreux résultats peuvent être généralisés à l'étude d'approximations simultanées. Dans le cas d'un seul irrationnel, un rôle essentiel est joué par les fractions continues utilisées dès 1650 par Huygens. L'approximation des irrationnels algébriques fut étudiée en 1844 par Liouville ; ses résultats furent améliorés à de nombreuses reprises jusqu'à l'important et définitif résultat de Roth en 1955.

Il m'a semblé utile de s'intéresser à deux principaux problèmes d'optimisation de l'approximation au lieu de se limiter à une description contemplative des fractions continues. On ne fera donc qu'évoquer l'algorithme des fractions continues pour l'obtention de bonnes approximations avant de passer à l'étude des constantes d'approximation et l'optimisation de l'ordre d'approximation.

1 Généralités – Fractions continues

1.1 Position du problème - Définition

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut approcher tout réel α par des rationnels aussi proches que l'on veut au sens où

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists p, q \in \mathbb{Z} \ \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \epsilon.$$

Mais lorsque l'on fait tendre ϵ vers 0, les entiers p et q qui conviennent tendent vers l'infini et on n'a en fait aucun contrôle de l'interdépendance entre la taille de q et l'écart ϵ.

Il semble alors naturel, pour mesurer la qualité de l'approximation, de dire qu'un réel α est bien approché par un rationnel $\frac{p}{q}$ si $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ est petit sans que q ne soit trop grand. On va donc s'intéresser à construire des rationnels $\frac{p}{q}$ tels que l'écart $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ soit majoré par une puissance de q.

Ainsi, on dit qu'un réel α est approchable à l'ordre $s > 0$ s'il existe $K > 0$ et une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ distincts de α tels que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{K}{q^s}$.

On voit apparaître ici deux nombres, K et s, que l'on cherchera à optimiser et qui feront donc l'objet des deuxième et troisième parties.

1.2 Premiers résultats

On a un premier résultat concernant l'approximation des rationnels :

Théorème. *Tout rationnel est approchable à l'ordre* 1 *et pas plus.*

On a ensuite la caractérisation suivante des irrationnels :

Théorème. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $\frac{p_n}{q_n}$ de rationnels vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ 0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{\epsilon(n)}{q_n} \qquad \textit{avec } \epsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Alors α est irrationnel.

Le théorème suivant, dû à Dirichlet (1805 - 1859) montre que réciproquement pour tout nombre irrationnel α, il existe de bonnes approximations diophantiennes :

Théorème (Dirichlet)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*
Alors α est approchable à l'ordre 2 *et on peut choisir $K = 1$.*

1.3 Nombres algébriques - Théorème de Liouville

On rappelle ici quelques définitions concernant les nombres algébriques.

Définition. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$.*
Le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{Q}[X]/P(\alpha) = 0\}$ est appelé polynôme minimal de α.
Le degré du polynôme minimal π_α du nombre α s'appelle degré de α et se note $deg(\alpha)$.

Définition. *Le nombre complexe α est dit transcendant s'il n'est pas algébrique, c'est-à-dire si*

$$\forall P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\},\ \ P(\alpha) \neq 0$$

Le théorème suivant dû à Liouville (1844) nous donne une majoration de l'ordre d'approximation d'un nombre algébrique :

Théorème (Liouville)**.** *Soit α un nombre algébrique réel de degré $d \geq 2$.*
Alors α n'est pas approchable à un ordre $> d$.

Ce théorème a une grande importance historique, puisqu'il a permis de définir explicitement les premiers nombres transcendants appelés nombres de Liouville. Jusque-là, on ne connaissait que l'existence des nombres transcendants par complémentarité dans $\mathbb{R}$ des nombres algébriques et ce n'est qu'en 1873 que Hermite établit la transcendance de e, permettant à Lindemann d'établir celle de π en 1882.

Définition. *On dit que le nombre réel irrationnel α est un nombre de Liouville, si, pour tout n assez grand il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 2$ vérifiant $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$.*
Tout nombre de Liouville est transcendant.

Exemple. *La somme de la série de Engel $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ est transcendante.*

1.4 Fractions continues

Pour tout irrationnel α, le théorème de Dirichlet assure l'existence d'une suite de couples (p_n, q_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. On s'attache donc ici à construire de telles approximations.

Définition. *La fraction $\frac{p}{q}$ est dite fraction de meilleure approximation, ou réduite du nombre réel α, si $q > 1$ et si*

$$\forall (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \ q' < q\ \ \Rightarrow |q'\alpha - p'| > |q\alpha - p|$$

La fraction $\frac{p_1}{1} = [\alpha]$ est aussi une réduite de α et c'est la seule réduite de dénominateur 1 si $\alpha - [\alpha] \leq \frac{1}{2}$; si $\alpha - [\alpha] > \frac{1}{2}$, la fraction $\frac{p_2}{1} = [\alpha] + 1$ est aussi une réduite de α, et c'est la seule autre réduite de dénominateur 1.

On montre que si α est irrationnel, la suite de meilleure approximation de α est infinie et α est la limite de sa suite de meilleure approximation. Si α est rationnel, la suite de meilleure approximation de α est finie et de dernier terme α. Les réduites sont alors données par l'algorithme suivant :

Théorème (Algorithme des fractions continues)**.** *La suite de meilleure approximation de α est déterminée par les formules de récurrence valables pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $q_n\alpha - p_n \neq 0$:*

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} \\ a_n = \left[-\dfrac{q_{n-1}\alpha - p_{n-1}}{q_n\alpha - p_n}\right] \end{cases}$$

en introduisant deux réduites conventionnels $(p_{-1}, q_{-1}) = (0, 1)$ et $(p_0, q_0) = (1, 0)$.

Définition. *Pour tout entier $n \geq 0$ tel que la réduite de rang $n + 1$ du réel α existe, on appelle quotient complet de rang n de α la fraction $x_n = -\frac{q_{n-1}\alpha - p_{n-1}}{q_n\alpha - p_n}$ et quotient incomplet de rang n de α $a_n = [x_n]$. La suite, finie ou infinie, des quotients incomplets a_n s'appelle développement de α en fraction continue et on note $\langle a_0, a_1, \cdots, a_n\rangle$ (respectivement $\langle a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\rangle$) la dernière réduite de α si $\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \in \mathbb{Q}$ (resp. la limite des réduites de α si α est irrationnel).*

Remarque. *On a* $x_k = a_k + \dfrac{1}{x_{k+1}}$ *et en développant les formules précédentes il vient*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}} \quad et \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Citons le résultat suivant dû à Lagrange.

Théorème. *Le développement en fractions continues d'un réel* α *est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si* α *est un nombre quadratique.*

Nous définissons ici une notion que l'on utilisera dans la deuxième partie :

Définition. *Deux réels* α *et* α' *sont dits équivalents (noté* $\alpha \sim \alpha'$*) si* $\exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *tq* $\alpha' = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ *et* $ad - bc = \pm 1$
Il s'agit d'une relation d'équivalence. On voit que tous les rationnels sont équivalents.

Théorème. *Deux réels* α *et* α' *dont les quotients incomplets de rang* n *sont notés* a_n *et* a'_n *sont équivalents si et seulement si leurs développements sont tous deux finis, ou s'il existe dans* $\mathbb{N}$ *deux entiers* k *et* n_0 *tels que pour tout* $n \geq n_0$, $a_n = a'_{n+k}$.

2 Constante d'approximation – Chaînes de Markoff

2.1 Définition

Définition. *Pour tout irrationnel* α*, on appelle constante d'approximation de* α *l'élément* $\gamma(\alpha)$ *de* $\mathbb{R}$ *défini par* $\gamma(\alpha) = \liminf\limits_{q \to \infty} q\,|q\alpha - p|$*,* p *désignant l'entier le plus proche de* $q\alpha$.

D'après le téorème de Dirichlet, on a $\gamma(\alpha) \in [0, 1]$. Si α est approchable à un ordre $s > 2$, on a $\gamma(\alpha) = 0$. Si $\gamma(\alpha) > 0$, sa définition signifie que $\forall \epsilon \in]0, \gamma(\alpha)[$, l'inégalité $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{\gamma(\alpha) - \epsilon}{q^2}$ n'a qu'un nombre fini de solutions tandis que l'inégalité $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{\gamma(\alpha) + \epsilon}{q^2}$ en a un nombre infini : $\gamma(\alpha)$ est donc la constante optimale que l'on peut choisir pour approcher α à l'ordre 2, d'où la dénomination de $\gamma(\alpha)$.

2.2 Premiers résultats

On a un premier résultat, qui va permettre l'étude des constantes d'approximation par classes d'équivalence :

Théorème. *Si les irrationnels* α *et* α' *sont équivalents, leur constante d'approximation sont égales.*

On peut, montrer avec les propriétés des fractions continues, le théorème suivant qui nous donne une majoration de $\gamma(\alpha)$:

Théorème (Hurwitz)**.** *Pour tout irrationnel* α *l'inégalité*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{q^2}$$

a une infinité de solutions et cette constante ne peut pas être améliorée comme on peut le montrer en prenant $\alpha = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Markoff a montré que le théorème de Hurwitz pouvait être amélioré. Si α est équivalent à $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, c'est-à-dire une des racines de $x^2 + x - 1$, la constante $\sqrt{5}$ ne peut pas être améliorée.
Sinon l'inéquation $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \dfrac{1}{q^2}$ a une infinité de solutions et la constante ne peut pas être améliorée si α est équivalent a une racine de $2x^2 + 4x - 2$.
Et ainsi de suite, la suite des nombres $\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$,... tend vers $\dfrac{1}{3}$ et constitue le résultat de la théorie de Markoff classique.

2.3 Une équation diophantienne

La détermination des constantes d'approximation nécessite l'étude des solutions entières positives de l'équation

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2 \tag{1}$$

A des permutations près, on peut supposer $m \geq m_1 \geq m_2$. Les valeurs de m qui apparaissent ici sont appelées les nombres de Markoff.

Si deux des nombres m, m_1, m_2 sont égaux, alors les solutions sont les solutions triviales $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$. Sinon m, m_1, m_2 sont distincts.

On montre que chacune des solutions non-triviales fournit trois solutions distinctes (m', m_1, m_2), (m, m_1', m_2), (m, m_1, m_2') où

$$m' = 3m_1m_2 - m, \quad m_1' = 3mm_2 - m_1, \quad m_2' = 3mm_1 - m_2$$

et que l'on obtient en répétant ce procédé toutes les solutions. Parmi ces trois solutions, l'une d'entre elles a un maximum inférieur à la solution "génératrice" alors que les deux autres ont un maximum strictement supérieur, c'est pourquoi on représente les solutions par un arbre binaire appelé arbre de Markoff. Il est alors facile de programmer un algorithme donnant les triplets solutions jusqu'au niveau n (voir Annexes).
On montre par induction que les entiers $m, m1, m2$ sont premiers entre eux deux à deux.

2.4 La théorie de Markoff classique

Définition. *Soient m, m_1, m_2 des entiers positifs solutions de l'équation (1) avec $m \geq m_1 \geq m_2$.
Comme pgcd$(m1, m) = 1$, $m1$ est un générateur de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, donc il existe $k \in [|0, m-1|]$ tel que $m_1k \equiv m_2\ (m)$.
On a aussi $m_2k \equiv -m_1\ (m)$, donc $k^2 \equiv -1\ (m)$. On note alors l l'entier défini par $k^2 + 1 = lm$.
On appelle forme de Markoff F_m associée au nombre de Markoff m le trinôme définie par*

$$mF_m(x, y) = mx^2 + (3m - 2k)x + (l - 3k)$$

Son discriminant est $9m^2 - 4 > 0$, F_m possède donc deux racines, ces racines étant de plus équivalentes. On note θ_m une de ses racines.

Théorème. *Soit α un irrationnel.*

(i) Si $\gamma(\alpha) > \dfrac{1}{3}$ alors α est équivalent à une racine de F_m, où F_m est une forme de Markoff.

(ii) Réciproquement si α est équivalent à une racine de F_m alors $\gamma(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - \dfrac{4}{m^2}}} > \dfrac{1}{3}$ et l'inéquation $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{\gamma(\alpha)}{q^2}$ a une infinité de solutions.

(iii) Il existe une infinité de réels non-équivalents tels que $\gamma(\alpha) = \dfrac{1}{3}$.

Ce théorème réalise donc une amélioration du théorème de Hurwitz. Si on note $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, la suite ordonnée des nombres de Markoff, le théorème affirme que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ \ \alpha \nsim (\theta_k)_{k\in[|0,n-1|]} \Rightarrow \gamma(\alpha) \leq \dfrac{1}{\sqrt{9 - \dfrac{4}{m_n^2}}}$ (ie l'inégalité $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{9 - \dfrac{4}{m_n^2}}}\dfrac{1}{q^2}$ a une infinité de solutions) et cette majoration est optimale pour l'ensemble des irrationnels privé des classes d'équivalence de $(\theta_k)_{k\in[|0,n-1|]}$ puisque $\gamma(\theta_n) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - \dfrac{4}{m_n^2}}}$.

2.5 Le spectre de Markoff - Aspects non abordés

La théorie de Markoff classique étudiée ici nous montre donc l'existence de constantes d'approximation dans l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$. Je me suis alors demandé si l'on pouvait trouvé des constantes d'approximation en dehors de cet intervalle. On sait bien sûr que 0 et une constante d'approximation pour tout nombre approchable à un ordre $s > 2$. Mais qu'en est-il pour les nombres de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{3}\right[$?

Pour éclaircir mes questions, je suis rentré en contact avec le département théorie des nombres de l'Institut Fourier de Grenoble. Les chercheurs m'ont affirmé que beaucoup de questions se posent encore sur la répartition du spectre de Markoff et les résultats sur les constantes inférieures restent lacunaires. Ils m'ont alors orienté vers Serge Perrine qui a soutenu une thèse sur le sujet en 1988 et a réalisé une synthèse sur l'état contemporain de cette théorie dans son livre. Ce dernier a su éclaircir mes interrogations.

Les constantes données par la théorie de Markoff classique sont des nombres isolés à l'exception de $1/3$ qui est un point d'accumulation. La partie du spectre comprise entre $1/3.334367$ et $1/3$ contient comme l'a montré Flakive en 1976 une infinité de points d'accumulations dont la valeur $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$. Kinney et Pitcher ont montré l'existence d'une infinité de trous dans le spectre de Markoff au dessus de $1/\sqrt{12}$ qui est point d'accumulation. On connaît notamment l'existence du trou $\left]\dfrac{1}{\sqrt{13}}, \dfrac{1}{\sqrt{12}}\right[$. De plus, il existe un nombre β appelé nombre de Freiman, $\beta^{-1} = 4 + \dfrac{253589820 + 283748\sqrt{462}}{491993569}$, telle que toute valeure comprise entre 0 et β soit une constante de Markoff.

3 Mesure d'irrationalité

3.1 Définition

Définition. *Soit α un nombre irrationnel. On dit que $\mu > 0$ est une mesure d'irrationalité pour α s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ on ait*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^\mu}$$

Remarque. *Le théorème de Liouville entraîne que tout nombre algébrique de degré d admet d pour mesure d'irrationalité. Par contre un nombre de Liouville n'admet pas de mesure d'irrationalité.*

Définition. *Si α admet une mesure d'irrationalité, la borne inférieure de toutes ces mesures d'irrationalité s'appelle la mesure optimale d'irrationalité de α et se note $\mu(\alpha)$.*
Cette définition signifie que $\mu(\alpha)$ est la valeur optimale de l'ordre d'approximation du réel α.

3.2 Propriétés - Application

Proposition. $\mu(\alpha) \geq 2$

Une des applications importantes de la connaissances de la mesure d'irrationnalité est l'étude d'équations diophantiennes. Ainsi on peut s'interesser à savoir s'il existe une infinité de solutions entières à l'équation $x^3 - 2y^3 = 1$. On a $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 - 2 = \left(\dfrac{x}{y} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\dfrac{x}{y} - j\sqrt[3]{2}\right)\left(\dfrac{x}{y} - j^2\sqrt[3]{2}\right)$.
S'il existait une infinité de solutions, on aurait $\left|\dfrac{x}{y} - \sqrt[3]{2}\right| \leq \dfrac{C}{y^3}$ pour une infinité de rationnels $\dfrac{x}{y}$ et $\sqrt[3]{2}$ serait approchable à l'odre 3.

Le théorème de Liouville ne nous permet pas ici de répondre, c'est pourquoi on a cherché à améliorer ce résultat à plusieurs reprises, jusqu'à aboutir au théorème de Roth.

3.3 Théorème de Roth

Théorème (Thue (1909))**.** *Soit α un réel algébrique de degré d.*
On a $\mu(\alpha) \leq \frac{1}{2}d + 1$.

Ce théorème permet alors d'affirmer que l'équation $x^3 - 2y^3 = 1$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Théorème (Siegel (1922))**.** *Soit α un réel algébrique de degré d.*
On a $\mu(\alpha) \leq 2\sqrt{d}$.

Théorème (Gelfand - Dyson (1947))**.** *Soit α un réel algébrique de degré d.*
On a $\mu(\alpha) \leq \sqrt{2d}$.

Et enfin le théorème de Roth, qui lui a valu la médaille Fields en 1955 :

Théorème (Roth)**.** *Soit α un réel algébrique irrationnel.*
On a $\mu(\alpha) = 2$.

Ce théorème a une très grande importance puisqu'il affirme que tout nombre algébrique n'est pas approchable à un ordre > 2 et donne donc une condition suffisante de la transcendance d'un nombre. L'étude des constantes d'approximation de la partie 2 concerne ainsi l'ensemble des nombres algébriques.

4 Annexes

4.1 Programmation de l'algorithme des fractions continues en Maple

On utilise ici les capacités de calcul de Maple pour programmer l'algorithme des fractions continues donné dans la partie 1 et obtenir des approximations rationnelles de réels.

```
> with(numtheory):
```

`dev_frac_continue(alpha, n)` retourne la suite des n premiers quotients incomplets de α.

```
> dev_frac_continue:=proc(alpha,n)
local a,p0,p1,p2,q0,q1,q2,i,res;
p0:=0; p1:=1; q0:=1; q1:=0; res:=NULL;
for i from 0 to n do
    a:=floor(evalf(-(q0*alpha-p0)/(q1*alpha-p1),200));
    p2:= a*p1+p0;
    q2:= a*q1+q0;
    p0:=p1; p1:=p2; q0:=q1; q1:=q2;
    res:=res,a;
od;
res;
end:
> dev_frac_continue(Pi,50);
```

$$3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1$$

On peut vérifier les résultats avec la librairie `numtheory` :

```
> cfrac(Pi,10);
```

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+...}}}}}}}}}}$$

```
> cfrac (Pi,50,'quotients');
```

$$[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, ...]$$

On peut aussi programmer l'algorithme donnant la n^{ieme} réduite de α pour obtenir de bonnes approximations rationnelles.

```
> nieme_reduite:=proc(alpha,n)
local a,p0,p1,p2,q0,q1,q2,i;
p0:=0; p1:=1; q0:=1; q1:=0;
for i from 1 to n do
    a:=floor(evalf(-(q0*alpha-p0)/(q1*alpha-p1),200));
    p2:= a*p1+p0;
    q2:= a*q1+q0;
    p0:=p1; p1:=p2; q0:=q1; q1:=q2;
od;
p1/q1;
end:
> nieme_reduite(Pi,50);
```

$$\frac{16397605394050964443746106649}{5219519906667074477262822481}$$

Comme le montre le calcul ci-dessous, la qualité de l'approximation est très bonne :

```
> evalf(nieme_reduite(Pi,50),60);
```

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582099887$$

```
> evalf(Pi,60);
```

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494$$

4.2 Programmation de la recherche des solutions de l'équation (1)

J'ai écrit ce code en Caml afin d'obtenir l'arbre de Markoff de niveau n. On définit le type `arbre_markoff` :

```
#type arbre_markoff = Vide | Noeud of (int * int * int) * (arbre_markoff) * (arbre_markoff);;
Type arbre_markoff defined.
```

Je ne donne ici que les fonctions intéressantes, on ne trouvera pas par exemple l'implémentation de `imprime_arbre_de_markoff` que j'ai réalisé pour afficher un arbre dans le terminal Caml.

```
imprime_arbre_de_markoff : arbre_markoff -> unit = <fun>
#install_printer "imprime_arbre_de_markoff";;
- : unit = ()
```

La fonction suivante donne l'arbre de Markoff de niveau n à l'aide de l'algorithme décrit à la partie 2.

```
#let arbre_de_markoff n =
   let rec aux (m,m1,m2) = function
      |i when i=n ->Noeud((m,m1,m2),Vide,Vide)
      |0 ->Noeud((1,1,1),(aux (2,1,1) 1),Vide)
      |1 ->Noeud((2,1,1),(aux (5,2,1) 2),Vide)
      |i ->let s1 =  (3*m*m1-m2,m,m1) and s2 = (3*m*m2-m1,m,m2) in
            Noeud((m,m1,m2),(aux s1 (i+1)),(aux s2 (i+1)))
   in aux (1,1,1) 0;;
   arbre_de_markoff : int -> arbre_markoff = <fun>
#arbre_de_markoff 5;;

                                        1,1,1
                                          |
                                        2,1,1
                                          |
                    ______________________5,2,1_____________________
                   /                                                \
        _________29,5,2_________                          _________13,5,1_________
       /                        \                        /                        \
  __433,29,5__             __169,29,2__             __194,13,5__             __34,13,1___
 /            \           /            \           /            \           /            \
37666,433,29  6466,433,5  14701,169,29   985,169,2   7561,194,13  2897,194,5  1325,34,13    89,34,1
- : arbre_markoff =
```

On peut aussi programmer la recherche de l'ensemble des nombres de Markoff intervenant dans les constantes d'approximation. `nombre_de_markoff n` donne les nombres de Markoff $\leq n$.

```
#let nombre_de_markoff n =
   let rec aux = function
      | (m,m1,m2) when m>n ->[]
      | (m,m1,m2)->let s1 = (3*m*m1-m2,m,m1) and s2 = (3*m*m2-m1,m,m2) in
            m::((aux s1)@(aux s2))
   in match n with
      | 1->[1]
      | i when i<4 ->[1;2]
      | _->sort__sort (fun x y ->x<y) ([1;2]@(aux (5,2,1)));;
nombre_de_markoff : int -> int list = <fun>
#nombre_de_markoff 1000;;
- : int list = [1; 2; 5; 13; 29; 34; 89; 169; 194; 233; 433; 610; 985]
```

On retrouve à l'aide de la formule $\gamma(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - \dfrac{4}{m^2}}}$ les valeurs des constantes $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{5}{\sqrt{221}}$, $\frac{13}{\sqrt{1517}}$,...

Remerciements

Je souhaiterais adresser mes remerciements au laboratoire de théorie des nombres de l'institut Fourier de Grenoble qui m'a accueilli avec une très grande générosité et en particulier David Bourqui qui a su lors de son exposé sur le théorème de Roth suscité mon admiration pour ce domaine des mathématiques.

Je souhaiterais remercier également Serge Perrine qui a répondu à toutes mes interrogations sur la théorie de Markoff et les constantes d'approximation.

Références

[1] Descombes, R. *Eléments de théorie des nombres.* Presses Universitaires de France, 1986.

[2] Duvernay, D. *Théorie des nombres.* Dunod, 1998.

[3] *Approximation diophantienne des nombres algébriques.* Faculté des sciences de l'Université de Paris, 1961.

[4] Cassels, J.W.S. *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge University Press, 1957.

[5] Schmidt, W.M. *Diophantine Approximation.* Springer, 1996.

[6] Schmidt, W.M. *Diophantine Approximations and Diophantine Equations.* Springer, 1996.

[7] Hardy, G.H., Wright, E.M. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford Science Publications, 1995.

[8] Parshin, A.N., Shafarevich, I.R. *Encyclopedia of Mathematical Sciences, Number Theory IV.* Springer, 1998.

[9] Perrine Serge *La théorie de Markoff et ses développements.* Tessier & Ashpool, 2002.

Si les mathématiques sont la reine des sciences,
la théorie des nombres est la reine des mathématiques :
elle est sans rivale pour la beauté et la force de ces démonstrations.

C.F. Gauss